费定晖　周学圣编演
郭大钧　邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

# 数学分析习题集题解



山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇

# 数学分析习题集题解

## （四）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

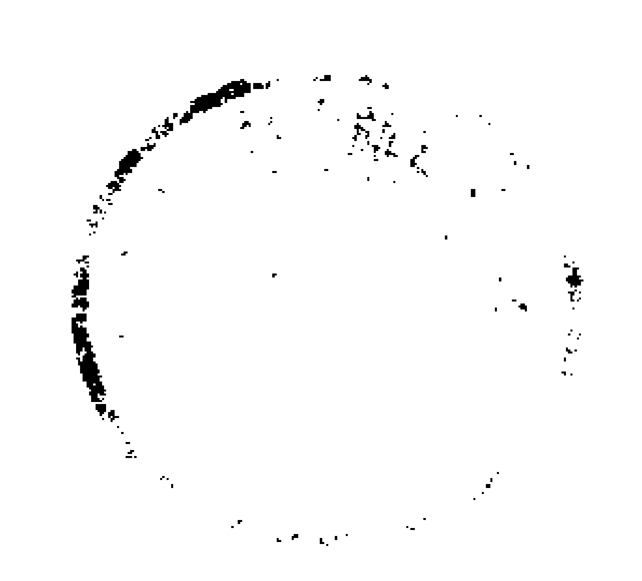
Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解
(四)
费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审
*
山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路16号　邮编250002)
山东科学技术出版社发行
(济南市玉函路16号　电话2064651)
济南新华印刷厂印刷
*
787mm×1092mm　32开本　17印张　406千字
2001年3月第2版第9次印刷
印数:201 901—203 900
ISBN 7—5331—0102—2
O·8　定价:15.50元

**图书在版编目(CIP)数据**

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 (4)/费定晖编.—2版.—济南:山东科学技术出版社,1999.9
(2001.3重印)
ISBN 7-5331-0102-2

Ⅰ.Б… Ⅱ.费… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题
Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43958号



# 出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄

本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

# 目　　录

# 第五章　级　　数

## §1.　数项级数.同号级数收敛性的判别法

1°一般概念　对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a^n, \tag{1}$$

若　　$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$（级数的和）

存在，式中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则称级数(1)为收敛的．反之，则称级数(1)为发散的.

2°哥西准则　级数(1)收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\epsilon > 0$，都存在有数 $N = N(\epsilon)$，使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时，不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon$$

成立.

特别是，若级数收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3°比较判别法Ⅰ.　设除级数(1)外，还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots. \tag{2}$$

若当 $n \geqslant n_0$，不等式

$$0 \leqslant a_n \leqslant b_n$$

成立，则 1)从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛；2)从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是，当 $n\to\infty$ 若 $a_n\sim b_n$，则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4°比较判别法 Ⅱ. 设

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^{①},$$

则(a)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $p\leqslant 1$ 时级数(1)发散.

5°达朗伯耳判别法　若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则(a)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $q>1$ 时级数(1)发散。

6°哥西判别法　若 $a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则(a)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $q>1$ 时级数(1)发散。

7°拉阿伯判别法　若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则(a)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $p<1$ 时级数(1)发散。

8°高斯判别法　若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}},$$

式中 $|\theta_n|<C$ 而 $\epsilon>0$，则(a)当 $\lambda>1$ 时级数(1)收敛，(б)当 $\lambda<1$ 时级数(1)发散；(в)当 $\lambda=1$ 时，若 $\mu>1$ 则级数(1)收敛；若 $\mu\leqslant 1$ 则级数(1)发散。

9°哥西积分的判别法　若 $f(x)(x>0)$ 是非负的不增函数，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

---

① 记号 $O^*$ 的意义参阅第一章 § 6, 1°。

与积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

同时收敛或同时发散。

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

**2546.** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots.$

**解** 由于

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}},$$

故得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$$

即所给级数收敛，且其和为$\frac{2}{3}$.（以下有关各题省略这两句话）

**2547.** $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots.$

**解** 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$$

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$.

**解** 由于

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\frac{1}{2}S_n=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+1+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right),$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

2549. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$.

**解** 由于

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

**2550.** $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

**解** 由于

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

**2551.** (a) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots\qquad(|q|<1)$;

(б) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots\qquad(|q|<1)$.

**解** 令 $z=q(\cos\alpha+i\sin\alpha)=qe^{i\alpha}$，其中 $i=\sqrt{-1}$.

于是得 $|z|=|q|<1$，并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha+i\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin n\alpha \tag{1}$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-q\cos\alpha-iq\sin\alpha}$$

$$=\frac{(1-q\cos\alpha)+iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}. \tag{2}$$

比较(1)、(2)两式的实部及虚部，即得

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin\alpha=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$;

(б) $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha-1$

$$=\frac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}-1=\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

2552. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n-2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

**解** 由于

$$S_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})$$
$$+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-2\sqrt{5}$$
$$+\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$
$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}.$$

2553. 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

**解** 记 $x=k\pi$. 若 $k$ 为整数,则由 $\sin nx=0$ 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 是收敛的,且其和为零. 若 $k$ 非整数,我们以下将证 $\sin nx$ 并不趋于零,于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin nx=0,$$

则当 $n\to\infty$ 时也有 $\sin(n+1)x\to0$. 但是

$$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin nx,$$

由 $\sin(n+1)x\to0$ 及 $\sin nx\to0$(当 $n\to\infty$ 时)知 $\cos nx\sin x\to0$(当 $n\to\infty$ 时),而 $\sin x=\sin k\pi\neq0$,故必有

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx=0.$$

但

$$1=\sin^2 nx+\cos^2 nx.$$

令 $n\to\infty$，两端取极限，即得左端为 1 而右端为 0，这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假设不真，也即 $\sin nx \not\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的发散性获证.

**2554.** 证明，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n,\text{其中 } A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\ (p_1=1,p_1<p_2<\cdots)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

**证** 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的部分和叙列为

$$l_1,l_2,\cdots,l_n,\cdots,$$

则 $l_n=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\sum\limits_{i=1}^{p_{n+1}-1}a_i$.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 $S$. 因此，

$$\lim_{n\to\infty}l_n=\lim_{n\to\infty}S_{p_{n+1}-1}=S,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是收敛的，且与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 有相同的和.

反之不真. 例如，级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的，但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

2555. 证明,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的各项是正的,而把这级数的项经过组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛,则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

**证** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛,记其和为 $S$. 考虑原级数的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$,并注意到 $a_k>0(k=1,2,\cdots)$,故存在 $n_0$,使

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{l=1}^{n_0}A_l<S.$$

显然 $S_n<S_{n+1}$ 对一切 $n$ 成立. 于是,$\{S_n\}$ 单调上升且有界. 因此,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在有限,即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性:

2556. $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

**解** 由于通项 $a_n=(-1)^{n-1}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限不存在,更不可能趋于零,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.

2557. $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1\neq0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$ 发散.

数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$也收敛.

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$.

**解** 由于$0<\frac{1}{n\sqrt{n+1}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$也收敛.

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$.

**解** 由于$\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2n}>0$且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$也发散.

2565. 证明,由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

**证** 设等差级数为$\sum_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$,其中$d$为公差.

当$d>0$时,总存在正整数$n_0$,使$a<(n_0-1)d$,则当$n\geqslant n_0$时,总有$a+(n-1)d<2(n-1)d$.于是,

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

注意到级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2nd}$发散,因而级数$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$发散,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$也发散.

当$d=0$时,$a$不可能为零,此时级数$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots$

$+\frac{1}{a}+\cdots$显然发散.

当 $d<0$ 时,将此级数的各项乘以 $-1$ 即化为 $d>0$ 的情形,于是,这级数也发散.

总上所述,不论 $d$ 为何值,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 均发散.

2566. 证明,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,(A) 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$(B) 皆收敛且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$(C) 也收敛. 若级数(A) 与(B) 皆发散,问级数(C) 的收敛性若何?

**证** 当级数(A) 及(B) 收敛时,由于 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$,故 $0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 也收敛,再由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$ 的收敛性即得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[a_n+(c_n-a_n)]=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.

若级数(A) 与(B) 皆发散,则级数(C) 可能收敛,也可能发散. 例如,级数

$$-1-1-1-\cdots\qquad 及\ 1+1+1+\cdots$$

皆发散,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 当 $c_n=0(-1<c_n<1)$ 时收敛;当 $c_n=\frac{1}{2}(-1<c_n<1)$ 也发散.

2567. 设已知二发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad 及 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

的各项不为负数，问下列二级数的收敛性若何：

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ 及(б) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$？

**解** (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)$ 可能收敛，也可能发散. 例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}$ 皆发散，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=0+0+\cdots+0+\cdots$ 却收敛. 又如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 皆发散，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 也发散.

(б) $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 一定发散. 事实上，

$$\max(a_n,b_n)\geqslant a_n\geqslant 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)$ 也发散.

2568. 证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 倒过来不成立，举出例子.

**证** 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 于是，总存在 $n_0$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0\leqslant a_n<1$. 从而，当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $0\leqslant a_n^2<a_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当然级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，

故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2$ 收敛，从而，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

反之不真. 例如，$a_n = \frac{1}{n}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 却发散.

**2569.** 证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

**证** 由于 $0 \leqslant 2|a_n b_n| \leqslant a_n^2 + b_n^2$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

其次，由于 $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 皆收敛，故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 也收敛.

最后，设 $b_n = \frac{1}{n}$，利用第一个结果即证得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

**2570.** 证明，若

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = a \neq 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**证** $na_n = \dfrac{a_n}{\frac{1}{n}}$. 不妨设 $a > 0$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a$，故对于任给的 $0 < \varepsilon < a$，总存在 $n_0$，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $\dfrac{a_n}{\frac{1}{n}} > a - \varepsilon > 0$ 或 $a_n > (a - \varepsilon)\dfrac{1}{n} > 0$.

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 也收敛，从而会得出级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 收敛的错误结论. 因此，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**2571.** 证明，若各项为正且其值单调减少的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

**证** 对于任何的 $m$ 与 $n > m$，我们有

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < \alpha_m,$$

其中 $\alpha_m$ 为该收敛级数的余式，由此得

$$na_n < \frac{n}{n-m}\alpha_m.$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故对于任给的 $\varepsilon > 0$，我们可取定某 $m_0$，使

$$\alpha_{m_0} < \varepsilon.$$

其次，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n-m_0} = 1$，故存在 $n_0(n_0 > m_0)$，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{n}{n-m_0}<2.$$

于是，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$0<na_n<2\varepsilon,$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 本题获证.

2572. 若当 $p=1,2,3,\cdots$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$. 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛？

**解** 若当 $p=1,2,3,\cdots$时，

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0, \tag{1}$$

并不一定有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 例如，取 $a_n=\frac{1}{n}$，显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，但却有

$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p}{n+1}=0$，故对一切 $p$，(1)式均成立.

这个事实与哥西准则并不矛盾，因为在哥西准则中，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，不等式

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

成立，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，其中的 $N$ 只依赖于 $\varepsilon$，而与 $p$ 无关. 本题的叙述中，条件并没有排除 $N$ 要与 $p$ 有关.

利用哥西准则，证明下列正项级数的收敛性：

2573. $a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots(|a_n|<10)$.

证 $$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{a_n}{10^n}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n+p-1}}{10^{n+p-1}}\right|$$
$$\leqslant\frac{|a_n|}{10^n}+\frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}}+\cdots+\frac{|a_{n+p-1}|}{10^{n+p-1}}$$
$$<\frac{1}{10^{n-1}}\left(1+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{10^{p-1}}\right)$$
$$<\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$
$$=\frac{1}{9\cdot10^{n-2}}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{10^{n-2}}<9\varepsilon$,即只要

$$n>2+\lg\frac{1}{9\varepsilon}.$$

取 $N=2+[\lg\frac{1}{9\varepsilon}]$,则当 $n>N$ 时,不等式

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

对一切正整数 $p$ 皆成立,因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ 收敛.

2574. $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}+\cdots$.

证 $$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}. \tag{1}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,故按哥西准则,对于任给的 $\varepsilon>0$,总存在正整数 $N$,使当 $n>N$ 时,对任意正整数

$p$，有

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}<\varepsilon. \qquad (2)$$

由(1)式及(2)式得知，当 $n>N$ 时，不等式

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

对一切正整数 $p$ 皆成立. 因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

2575. $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\cdots$

$$+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\cdots.$$

**解** $S_{n+p}-S_n=\sum\limits_{i=n+1}^{n+p}\frac{\cos ix-\cos(i+1)x}{i}$

$$=\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\sum_{i=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\cos(i+1)x$$

$$-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p},$$

故 $|S_{n+p}-S_n|\leqslant\frac{1}{n+1}+\sum\limits_{i=n+1}^{n+p-1}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\frac{1}{n+p}$

$$=\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，取正整数 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切正整数 $p$，有

$$|S_{n+p}-S_n|<\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$ 收敛.

利用哥西准则，证明下列级数的发散性：

2576. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$.

**解** 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$. 不论 $n$ 多大，若令 $p=n$，则有

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n项}$$

$$=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

2577. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

**解** 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{6}$. 不论 $n$ 多大，若令 $p=3n$，则有

$$|S_{3n+p}-S_{3n}|=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}$$

$$+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}$$

$$>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}$$

$$+\cdots+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$>\frac{1}{3}(\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n项})$$

$$=\frac{1}{6}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$ 发散.

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛.

2581. (a) $\frac{2\cdot 1!}{1^1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{2^n n!}{n^n}+\cdots$;

(б) $\frac{3\cdot 1!}{1^1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\cdots+\frac{3^n n!}{n^n}+\cdots$.

**解** (a)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$=\frac{2}{e}<1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛.

(б)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$=\frac{3}{e}>1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$发散.

2582. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\cdots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\cdots$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$$

$$=0<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛.

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot1001}{1\cdot3}+\frac{1000\cdot1001\cdot1002}{1\cdot3\cdot5}+\cdots$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1000+n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000\cdot1001\cdots(1000+n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}$ 收敛.

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot7}{2\cdot6}+\frac{4\cdot7\cdot10}{2\cdot6\cdot10}+\cdots$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}<1,$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cdot7\cdot10\cdots(3n+4)}{2\cdot6\cdot10\cdots(4n+2)}$ 收敛.

2585. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$,

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n=1}(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2})=\sqrt{2}-1<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$ 收敛.

2586. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}<1,$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$收敛.

2587. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

**解** $$\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\geqslant\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\sqrt[n]{n}>0,$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\cdot\sqrt[n]{n},$$

由于其通项趋于$\frac{1}{e}\neq 0$,故它是发散的.因此,原级数也是发散的.

注意,若用达朗伯耳判别法,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$,无明确结论,此时还应改用高斯判别法.

2588. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$.

**解** 当$n>1$时,$\ln n<n$.于是,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>0.$$

对于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$，故它是发散的. 因此，原级数也发散.

注意，若用达朗伯耳判别法，将遇到与 2587 题类似的情况.

2589. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

**解** 由于

$$0<\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^2},$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数也收敛.

注意，若用达朗伯耳判别法，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\cdot\frac{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2n^2+5n+4)^{\frac{n+2}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot\frac{n}{(2n^2+5n+4)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}}$$

$$=e\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

也可证得原级数收敛.

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$.

**解** 方法一：

$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}$$

$$=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{16},$$

利用数学归纳法,可证得通项为

$$a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\frac{1}{2}<1,$$

故级数收敛.

方法二:

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

利用数学归纳法，可证得

$$\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}}}$$

$$\cdot\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1)\text{重根号}}}\ .$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}}}$$

$$=\frac{1}{2}{}^{*)}<1,$$

故级数收敛.

*)利用 637 题的结果.

2591. 证明：若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(a_n>0),$$

则 $a_n=o(q_1^n)$，其中 $q_1>q$.

证 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，故利用 141 题的结果，即得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(q_1-q)>0$，则由上式知存在 $n_0$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<\varepsilon,$$

从而有

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon=\lambda q_1(n\geqslant n_0),$$

其中 $\lambda=\frac{q_1+q}{2q_1}<1$. 利用 $\lambda^n=o(1)$，即证得

$$a_n=\lambda^n q_1^n=o(q_1^n).$$

2592. 证明：若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1(a_n>0),$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

相反的结论不真. 研究例子

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots.$$

证 取 $0<\varepsilon<1-q$，由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1,$$

故存在 $n_0$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon=l<1.$$

从而

$$0<a_n\leqslant a_{n_0}l^{n-n_0}\ (n\geqslant n_0).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}l^{n-n_0}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

反之不真，例如，级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$$

显然是收敛的. 但是，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}, \text{当 } n=2m+1; \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{m}, \text{当 } n=2m,\end{cases}$$

故有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$$

2593. 证明，若对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\ (a_n>0)$ 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \tag{A}$$

存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q \tag{Б}$$

也存在.

相反的结论不真：若极限(Б)存在，则极限(A)可以不存在. 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

**证** 利用 141 题的结论，本题的前半部分即得证.

反之不真. 例如，对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2\cdot\sqrt[n]{2}}=\frac{1}{2}.$$

但是，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]}=\begin{cases}\frac{1}{4}, \text{当 } n \text{ 为偶数;}\\ 1; \text{当 } n \text{ 为奇数,}\end{cases}$$

故极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

**2594.** 证明，若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q\,(a_n\geqslant 0),$$

则(a)当 $q<1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；(6)当 $q>1$ 时这级数发散(**哥西判别法的推广**).

**证** (a)取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(1-q)$. 由于 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$，故存在 $n_0$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$0<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon.$$

从而

$$0<\sqrt[n]{a_n}<\frac{q+1}{2}\quad(n\geqslant n_0)$$

或

$$0<a_n<\left(\frac{q+1}{2}\right)^n \qquad (n\geqslant n_0).$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

故它是收敛的，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 也是收敛的.

2597. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

**解** $0<\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}\leqslant\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$.

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}+1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1,$$

故它是收敛的，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$ 也是收敛的.

利用拉阿伯和高斯判别法，研究下列级数的收敛性：

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p+\cdots$.

**解** $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{p}{2n+1}+0\left(\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\frac{p}{2},$$

故当$\frac{p}{2}>1$即$p>2$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$收敛.

2599. $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots(a>0,b>0,d>0)$.

**解** $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+nd}{a+nd}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)n}{a+nd}=\frac{b-a}{d},$$

故当$\frac{b-a}{d}>1$时，

级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\cdots[b+(n-1)d]}$收敛.

2600. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

**解** $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\frac{n!\ e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)!\ e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}}=\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}+p}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}e^{(\frac{1}{x}+p)\ln(1+x)}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e}e^{1+(p-\frac{1}{2})x+o(x)}-1}{x}=p-\frac{1}{2},$$

故当 $p-\frac{1}{2}>1$ 即 $p>\frac{3}{2}$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ 收敛.

2601. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

**解** $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=+\infty,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}\cdots(2+\sqrt{n}})$ 收敛.

2602. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}(p>0,q>0)$.

**解** $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p\left(1+\frac{qx}{1+x}\right)-1}{x}=p+q,$$

故当 $p+q>1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ 收敛.

2603. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}(p>0,q>0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[(1+\frac{1}{n})^q\frac{1+n}{p+n}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{(1+x)^{q+1}}{1+px}-1}{x}=q+1-p,$$

故当 $q+1-p>1$ 即 $q>p$ 时，级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$ 收敛．

2604. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left[(\frac{2n+2}{2n+1})^p\left(\frac{n+1}{n}\right)^q-1\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^p(1+x)^q-1}{x}=q+\frac{p}{2},$$

故当 $q+\frac{p}{2}>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$ 收敛．

2605. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n(p>0)$.

解 令 $a_n=\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n$. 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{x\ln n}{n}=0$ 故当 $n$ 充

分大时，$a_n>0$.

当 $x=0$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，它当 $p>1$ 时收敛，而当 $p\leqslant 1$ 时发散，当 $x\neq 0$ 时，我们有

$$\ln(a_n n^{p+x})=x\ln n+n\ln\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)$$

$$=nu_n+n\ln(1-u_n)=nu_n^2\cdot\frac{u_n+\ln(1-u_n)}{u_n^2},$$

其中 $u_n=\frac{x\ln n}{n}$，$u_n\neq 0(n>1)$，$u_n\to 0$，$nu_n^2\to 0(n\to\infty)$. 由洛比塔法则，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+\ln(1-u_n)}{u_n^2}=\lim_{V\to 0}\frac{v+\ln(1-v)}{v^2}$$

$$=\lim_{V\to 0}\frac{1-\frac{1}{1-v}}{2v}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{2(v-1)}=-\frac{1}{2},$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\ln(a_n n^{p+x})=0\ \text{或}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{p+x}}}=1.$$

由此可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+x}}$ 有相同的敛散性，故当 $p+x>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而当 $p+x\leqslant 1$ 时发散.

综上所述，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 仅当 $x>1-p$ 时收敛.

2606. 证明：若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则 $\qquad a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)(\varepsilon>0).$

**证** 下面记 $\alpha_n,\alpha'_n,\beta_n,\beta'_n,\beta''_n,\varepsilon_n$ 为无穷小量，即 $\alpha_n=o(1),\alpha'_n=o(1),\beta_n=o(1),\beta'_n=o(1),\beta''_n=o(1),\varepsilon_n=o(1)(n\to\infty)$.

由题设知，当 $n\to\infty$时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}.$$

取对数，即得

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\right)$$

$$=\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}(p+\alpha'_n).$$

令 $n=1,2,\cdots,N-1$ 并求和，则得

$$\ln a_1-\ln a_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}(p+\alpha'_n).$$

由 143 题(在其中令 $x_N=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n},y_N=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}$) 知

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n}\right)\bigg/\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right)=\lim_{N\to\infty}\alpha'_N=0.$$

又由 146 题知

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}=C+\ln(N-1)+\varepsilon_N,$$

其中 $C$ 是尤拉常数，$\varepsilon_N\to0$. 于是，令

$$\beta_N=\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\alpha'_n}{n}\right)\bigg/\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right),$$

有

$$\ln a_1-\ln a_N=(p+\beta_N)\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}$$

$$=(p+\beta_N)[C+\ln(N-1)+\varepsilon_N]$$

$$=(p+\beta_N)\ln(N-1)+k+\beta'_N,$$

其中 $k=Cp$ 为常数．于是，

$$\ln a_N=-(p+\beta_N)\ln(N-1)+k'-\beta'_N,$$

其中 $k'=\ln a_1-k$ 为常数，从而

$$a_N=e^{k'-\beta'_N}\cdot(N-1)^{-(p+\beta N)}$$

$$=e^{k'-\beta'N}\cdot\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)}\cdot N^{\beta''N}\cdot N^{-p}.$$

其中 $\beta''_N=-\beta_N$. 由于 $\beta''_N=o(1)$，故对于任给的 $\varepsilon>0$，当 $N$ 充分大时，有 $|\beta''_N|<\frac{\varepsilon}{2}$，从而 $N^{\beta''_N}<N^{\frac{\varepsilon}{2}}$. 再注意到

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta N)}=1,$$

即知：当 $N$ 充分大时，有

$$0<a_N\leqslant k''\cdot N^{\frac{\varepsilon}{2}}\cdot N^{-p}=O\left(\frac{1}{N^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}\right),$$

其中 $k''$ 是常数．于是，得

$$a_N=o\left(\frac{1}{N^{p-\varepsilon}}\right).$$

本题获证．

求出通项 $a_n$ 的减小的阶，从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性，设：

**2607.** $a_n=\frac{n^p+a_1n^{p-1}+\cdots+a_p}{n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q}$，其中 $n^q+b_1n^{q-1}+\cdots+b_q>0$.

**解** 由于 $a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$，故当 $q-p>1$ 即 $q>1+p$ 时，级数收敛．

2608. $a_n=\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$.

**解** 由于 $a_n\geqslant 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}}=\pi \text{ 或 } a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

故仅当 $1+p>1$ 即 $p>0$ 时，级数收敛.

2609. $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\frac{n-1}{n+1}(n>1)$.

**解** 由于 $a_n<0$，且

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)=O^*\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right),$$

故仅当 $\frac{p}{2}+1>1$ 即 $p>0$ 时，级数收敛.

2610. $a_n=\ln^p(\sec\frac{\pi}{n})$.

**解** 由于 $a_n>0(n>2$ 时)，且

$$a_n=\frac{1}{2^p}\ln^p\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{n}\right)\sim\frac{1}{2^p}\mathrm{tg}^{2p}\frac{\pi}{n}\sim\frac{1}{2^p}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2p}$$
$$=O^*\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

故仅当 $2p>1$ 即 $p>\frac{1}{2}$ 时，级数收敛.

2611. $a_n=\lg_{bn}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right) \qquad (a>0,b>0)$.

**解** 显然 $b\neq 1$（否则 $a_n$ 无意义）. 由于

$$a_n=\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)}{n\ln b}\sim\frac{1}{\ln b}\cdot\frac{\sqrt[n]{a}}{n^2}=O^*\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故级数收敛.

2612. $a_n=\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

**解** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}$

$=e^{n[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O^*(\frac{1}{n^3})]}$

$=e^{1-\frac{1}{2n}+O^*(\frac{1}{n^2})}$.

由于$a_n>0$，且

$$a_n=[e(1-e^{-\frac{1}{2n}+O^*(\frac{1}{n^2})})]^p\sim e^p\left[\frac{1}{2n}+O^*\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^p$$

$$=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right),$$

故仅当$p>1$时，级数收敛.

2613. $a_n=\frac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$.

**解** 由于

$$a_n=n^{-(1+\frac{k}{\ln n})}=e^{-(1+\frac{k}{\ln n})\ln n}=e^{-(\ln n+k)}=\frac{1}{n}e^{-k},$$

故级数显然发散.

2614. $a_n=\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

**解** 由于

$$a_n=\frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}=O^*\left(\frac{1}{n}\right),$$

故级数发散.

2615. 证明：若有$\alpha>0$使当$n\geqslant n_0$时$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha(a_n>0)$,

**解** $\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}=\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}$. 由洛比塔法则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln x}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}=0$，从而存在 $n_0$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}<1$，利用 2615 题的结论，即知级数发散．

利用哥西积分判别法，研究具如下通项的级数的收敛性：

**2619.** $a_n=\dfrac{1}{n\ln^p n}$.

**解** 由于不论 $p$ 为何数，当 $x$ 充分大时，函数 $\dfrac{1}{x\ln^p x}$ 都是非负递减的，并且

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(1-p)\ln^{p-1}x}\right|_2^{+\infty}, & p\neq1;\\ \left.\ln\ln x\right|_2^{+\infty}, & p=1\end{cases}$$

仅当 $p>1$ 时收敛，故级数仅当 $p>1$ 时收敛．

**2620.** $a_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}\ (n>2)$.

**解** 易知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$（不论 $p,q$ 为何实数）的导函数当 $x$ 充分大时是负的，故当 $x$ 充分大时，$f(x)$ 是非负递减函数。

若 $p=1$，则

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\Big|_3^{+\infty}, & q\neq 1;\\ \ln\ln\ln x\Big|_3^{+\infty}, & q=1.\end{cases}$$

当 $q>1$ 时收敛，$q\leqslant 1$ 时发散，故由哥西积分判别法知，原级数当 $p=1,q>1$ 时收敛，$p=1,q\leqslant 1$ 时发散．

若 $p\neq 1$，作代换 $\ln x=t$，有

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}.$$

当 $p>1$ 时，取 $\eta>0$ 使 $p-\eta>1$，由于（不论 $q$ 为何实数）

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p-\eta}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^{\eta}(\ln t)^q}=0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 收敛，从而原级数收敛；当 $p<1$ 时，取 $\tau>0$ 使 $p+\tau<1$. 由于

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p+\tau}\cdot\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\tau}}{(\ln t)^q}=+\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{dt}{t^p(\ln t)^q}$ 发散，从而原级数发散．

综上所述，可知原级数仅当 $p=1,q>1$ 及 $p>1,q$ 任意时收敛．

**2621.** 研究级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$$

的收敛性．

**解** 由于

$$\ln(n!)=\sum_{k=1}^{n}\ln k<n\ln n,$$

故

$$\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n\ln n} > 0.$$

利用 2619 题中 $p=1$ 的结果，知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 也发散．

**2622.** 证明：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项单调减小，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散．

**证** 设 $S_{2^n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}$，则因

$$a_1>a_2>\cdots a_{2^n}>a_{2^n+1}>\cdots>0,$$

故得

$$0<S_{2^n}<a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})<a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}, \tag{1}$$

且有

$$\begin{aligned}S_{2^n}&=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})\\&>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}\\&=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\cdots+2^n a_{2^n})>0.\end{aligned} \tag{2}$$

由(1)式得知：若 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；由(2)式得知：若 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散．由此本题获证．

注意，在此命题中，用作比较的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$$

可以用更普遍的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^n a_{m^n}$$

来代替，其中 $m$ 为任一自然数．证法类似．

2623. 设 $f(x)$ 为单调不增加的正值函数．证明，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛，则对于其余项 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下的估计：

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx.$$

利用此式，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和精确到 0.01.

**解**　由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的收敛性，根据哥西积分判别法，知积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛．由于 $f(x)$ 单调不增加，故

$$f(n+k+1) \leqslant \int_{n+k}^{n+k+1} f(x)dx \leqslant f(n+k)$$

$$(k=1,2,3,\cdots).$$

将这些不等式相加，得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n+k+1) \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} f(n+k),$$

即　$R_n - f(n+1) \leqslant \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant R_n$，

或

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx \leqslant R_n \leqslant f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx, \tag{1}$$

这就是所需证的不等式．

注意，原题中将(1)中的“≤”误写为“<”，这是不

对的，例如，若令

$$f(x)=\frac{1}{n^2}，当 n\leqslant x<n+1 时(n=1,2,\cdots)，$$则不等式(1)中左端的“$\leqslant$”号成为“$=$”号：

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx=R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots;$$

若令

$$f(x)=\frac{1}{n^2}，当 n<x\leqslant n+1 时(n=1,2,\cdots)，$$

则不等式(1)中右端的“$\leqslant$”成为“$=$”号：

$$R_n=f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty} f(x)dx$$
$$=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots.$$

最后，利用不等式(1)来求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$的和，精确到0.01．易知，当取$n=8$时，即有

$$R_8\leqslant\frac{1}{9^3}+\int_9^{+\infty}\frac{dx}{x^3}<0.008,$$

故取$\sum\limits_{k=1}^{8}\frac{1}{k^3}\doteq 1.20$作为级数和的近似值，即可保证误差不超过0.01．

2624．证明厄耳玛可夫判别法：设$f(x)$为单调减少的正值函数，又设

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda.$$

若$\lambda<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$收敛；若$\lambda>1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$发散．

**证** 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}f(e^{x})}{f(x)}=\lambda$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，使当 $x>N$ 时，有

$$e^{x}f(x)<(\lambda+\varepsilon)f(x).$$

当 $\lambda<1$ 时，取 $\varepsilon$ 使 $\lambda+\varepsilon=\rho<1$，则有

$$e^{x}f(e^{x})<\rho f(x).$$

于是，当 $m>N$ 时有

$$\int_{N}^{m}e^{x}f(e^{x})dx<\rho\int_{N}^{m}f(x)dx,$$

即
$$\int_{e^{N}}^{e^{m}}f(x)dx<\rho\int_{N}^{m}f(x)dx,$$

也即

$$(1-\rho)\int_{e^{N}}^{e^{m}}f(x)dx<\rho\int_{N}^{m}f(x)dx-\rho\int_{e^{N}}^{e^{m}}f(x)$$

$$=\rho\int_{N}^{e^{N}}f(x)dx-\rho\int_{m}^{e^{m}}f(x)dx.$$

由于 $N$ 充分大且 $m>N$，故 $m<e^{m}$. 又因 $f(x)>0$，故 $\int_{m}^{e^{m}}f(x)dx>0$. 从而

$$(1-\rho)\int_{e^{N}}^{e^{m}}f(x)dx<\rho\int_{N}^{e^{N}}f(x)dx,$$

$$\int_{e^{N}}^{e^{m}}f(x)dx<\frac{\rho}{1-\rho}\int_{N}^{e^{N}}f(x)dx.$$

固定 $N$，让 $m\to+\infty$，取极限即得

$$\int_{e^{N}}^{+\infty}f(x)dx\leqslant\frac{\rho}{1-\rho}\int_{N}^{e^{N}}f(x)dx=\text{常数}.$$

于是，由哥西积分判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛.

当 $\lambda>1$ 时，则取 $N$ 为充分大，可得

$$e^{x}f(e^{x})\geqslant f(x)\qquad(x>N).$$

从而

$$\int_N^m e^x f(e^x)dx \geqslant \int_N^m f(x)dx,$$

即

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx \geqslant \int_N^m f(x)dx$$

或

$$\int_{e^N}^m + \int_m^{e^m} \geqslant \int_N^{e^N} + \int_{e^N}^m,$$

故

$$\int_m^{e^m} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx \quad (m>N).$$

今设 $e_0=N+1, e_1=e^{e_0}, e_2=e^{e_1}, \cdots, e_{k+1}=e^{e_k}, \cdots$，并分别取 $m=e_0, e_1, e_2, \cdots$，则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx,$$

$$\int_{e_2}^{e_3} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx,$$

························

$$\int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x)dx \geqslant \int_N^{e^N} f(x)dx$$

·····················

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x)dx$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} n\int_N^{e^N} f(x)dx = +\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x)dx$ 为发散的，故由哥西积分判别法

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散．

2625. 证明罗巴契夫斯基判别法：设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调趋于零，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$$

同时收敛或同时发散，其中 $p_m$ 是满足不等式

$$a_n \geqslant 2^{-m} (n = 1, 2, \cdots, p_m)$$

的项 $a_n$ 的最大的指标．

证　由题设 $p_m$ 是满足不等式 $a_n \geqslant 2^{-m}$ 的项 $a_n$ 的最大指数，故有

$$\frac{1}{2^m} \leqslant a_{p_{m-1}+1} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$\frac{1}{2^m} \leqslant a_{p_{m-1}+2} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^m} \leqslant a_{p_m} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$a_{p_m+1} < \frac{1}{2^m},$$

于是，

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} \cdots + a_{p_m} \geqslant (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m}, \qquad (1)$$

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \cdots + a_{p_m} < (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}. \qquad (2)$$

将(1)式及(2)式对 $m$ 从 1 到 $N$ 求和(其中 $N$ 为任意正整数)，得

$$\sum_{m=1}^{N}(a_{p_{m-1}+1}+\cdots+a_{p_m})\geqslant\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^m},$$

$$\sum_{m=1}^{N}(a_{p_{m-1}+1}+\cdots+a_{p_m})<\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}.$$

由上述两个不等式可知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与级数$\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$同时收敛或同时发散．因此，我们如果能证明级数$\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$与级数$\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$同时收敛或同时发散，则命题即获证．

由$\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$的收敛性易得$\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$的收敛性．反之，若级数$\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}$收敛，则$\sum_{m=1}^{\infty}p_m2^{-m}$也收敛．事实上，记$A=\sum_{m=1}^{\infty}(p_m-P_{m-1})\cdot\frac{1}{2^{m-1}}$，由于$p_m-p_{m-1}\geqslant 0(m=1,2,\cdots)$，故有

$$\begin{aligned}
A&\geqslant\sum_{m=1}^{N}(p_m-p_{m-1})\frac{1}{2^{m-1}}\\
&=\sum_{m=1}^{N}p_m\cdot\frac{1}{2^{m-1}}-\sum_{m=1}^{N}p_{m-1}\cdot\frac{1}{2^{m-1}}\\
&=\sum_{m=1}^{N}p_m\cdot\frac{1}{2^{m-1}}-\sum_{l=0}^{N-1}p_l\cdot\frac{1}{2^l}\\
&=\frac{1}{2^{N-1}}p_N+\sum_{m=1}^{N-1}p_m\left(\frac{1}{2^{m-1}}-\frac{1}{2^m}\right)-p_0\\
&=\sum_{m=1}^{N-1}p_m2^{-m}+\frac{1}{2^{N-1}}p_N-p_0.
\end{aligned}$$

$$\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b}$$
$$=\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}.$$

由此可知，不论 $a=\frac{1}{2}$ 还是 $a\neq\frac{1}{2}$，当 $n$ 充分大时，上式右端均保持定号，故原级数可当成正项级数处理．

若 $a=\frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b})}\Bigg/\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{a^2-b}{4},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，故原级数收敛；

若 $a\neq\frac{1}{2}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a}+\sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a+\sqrt{n^2+n+b}}$$
$$\Bigg/\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{2a-1}{4}\neq 0,$$ 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故原级数发散．

**2628.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

**解** $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-1\right)+\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)\right].$$

分别考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}\right) 及 \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right),$$

它们都是正项级数．由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}\right)$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$ 收敛，从而，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right) 发散．$$

**2629.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

**解** 当 $x\neq0$ 及 $-1<x<+\infty$ 时，有

$$\ln(1+x)<x.$$

利用上式，即得

$$\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

$$\ln\frac{n+1}{n}=-\ln\frac{n}{n+1}$$

$$=-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)>\frac{1}{n+1},$$

即

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$$

于是,

$$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}}<\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}}<\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

但级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故原级数也收敛.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{a}}$.

**解** 先设$a>2$. 利用斯特林格公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^{n}e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}(0<\theta_n<1),$$

即得

$$\frac{\ln(n!)}{n^{a}}=\frac{\ln 2\pi}{2n^{a}}+\frac{\ln n}{2n^{a}}+\frac{\ln n}{n^{a-1}}+\frac{\theta_n}{12n^{a+1}}-\frac{1}{n^{a-1}}.$$

显然,当$a>2$时,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{a}}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{a-1}}$、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n}{n^{a+1}}$以及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}$均收敛,故原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{a}}$收敛.

现设$a\leqslant 2$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$,利用139题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{a}}\Big/\frac{1}{n^{a-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{n}=+\infty,$$

再注意到此时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}$发散，即知原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n!)}{n^{a}}$发散.

**2631.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$.

**解** 方法一：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1\right)$$

$$=\frac{e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\cdot n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=+\infty,$$

利用$\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$，即得$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$收敛.

方法二：

当$t$充分大时，有

$$e^t \geqslant At^4 \text{（}A\text{ 为大于零的常数），}$$

故存在 $n_0$，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$e^{\sqrt[3]{n}} \geqslant An^{\frac{4}{3}}.$$

从而

$$e^{-\sqrt[3]{n}} \leqslant \frac{1}{A}n^{-\frac{4}{3}}.$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ 收敛，故原级数收敛．

2632. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

**解** 当 $t$ 充分大时，有 $e^t \geqslant Bt^7$（$B>0$ 为常数），故存在 $n_0$，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$0 < n^2 e^{-\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{B}n^{-\frac{7}{2}+2} = \frac{1}{B}n^{-\frac{3}{2}}.$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故原级数收敛．

2633. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$.

**解** $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = \frac{\ln n}{e^{n^2+1}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} \sim \frac{\ln n}{n^2}$. 又由于存在 $n_0$，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有 $0 < \frac{\ln n}{n^2} \leqslant \frac{A}{n^{\frac{3}{2}}}$（$A>0$，常数），而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$ 收敛.

2634. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n + b}{c\ln n + d}}$.

**解** 先设 $c\neq0$. 若 $bc-ad\neq0$, 应用阿拉伯判别法，我们有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}-\frac{a\ln(n+1)+b}{c\ln(n+1)+d}}$$

$$=n\left\{e^{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}-1\right\}$$

$$=\frac{e^{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}-1}{\frac{(bc-ad)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}}\cdot\frac{(bc-ad)\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

$$\cdot\frac{1}{(c\ln n+d)[c\ln(n+1)+d]}.$$

当 $n\to\infty$ 时，上述等式右端的第一个因子趋于 1，第二个因子趋于 $bc-ad$，第三个因子趋于零，因此，

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=0.$$

从而级数发散；若 $bc-ad=0$，此时 $a_n=$ 常数 $>0(n=1,2,\cdots)$，故级数发散.

若 $c=0$，则，

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{e^{-\frac{a\ln(1+\frac{1}{n})}{d}}-1}{-\frac{a}{d}\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$\cdot\left(-\frac{a}{d}\right)\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\to-\frac{a}{d}\qquad(d\neq0).$$

于是，如果 $-\frac{a}{d}>1$ 即 $\frac{a}{d}<-1$，则级数收敛；如果 $-\frac{a}{d}<1$，则级数发散；若 $-\frac{a}{d}=1$，则 $a_n=\frac{C}{n}(C>0$ 是常

数），从而级数发散.

2635. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

**解** 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}$. 由于

$$\frac{\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}}=\left(\frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}\right)^2$$

并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sin\frac{1}{n}}{\ln\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln\sin x}{\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=1,$$

故
$$\frac{1}{\ln^2}(\sin\frac{1}{n})\sim\frac{1}{\ln^2\frac{1}{n}}=\frac{1}{\ln^2 n}.$$

又当 $n>1$ 时，$0<\ln n<\sqrt{n}$，故 $\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ 发散，从而原级数发散.

2636. $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{a}{n})^{n^3}$.

**解** 若 $a=0$. 级数显然发散.

若 $a\neq 0$. 由于

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\cos\frac{a}{n}}$$

$$=e^{n^2\ln}\left[1-\frac{a^2}{2^{n^2}}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

$$=e^{n^2}\left[-\frac{a^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]=e^{-\frac{a^2}{2}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

并且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-\frac{a^2}{2}}<1$,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}$当$a\neq 0$时收敛.

2637. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

解 $a_n=\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$

$$=\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}},$$

其中$\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}-1\to 0$(当$n\to\infty$时).

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}\pi x-\cos\pi x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\operatorname{ch}\pi x+\pi\sin\pi x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\pi^2\operatorname{ch}\pi x+\pi^2\cos\pi x}{2}=\pi^2,$$

故得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}}{\dfrac{1}{n^2}}\cdot\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}-\cos\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}$$

$$\cdot\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\left(\frac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}-1\right)\right]^{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}}$$

$$=1\cdot\pi^2\cdot 1=\pi^2,$$

故存在常数 $k>0$，有 $\left|\dfrac{a_n}{\dfrac{1}{n^2}}\right|\leqslant k$（$n$ 充分大），即 $|a_n|\leqslant k\cdot\dfrac{1}{n^2}$，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故原级数收敛.

**2638.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

**解** 由于

$$n!>\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\text{**)},$$

故有

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}>\frac{1}{e^n}n^{n-\sqrt{n}}=b_n.$$

但 $\sqrt[n]{b_n}=\dfrac{1}{e}n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\to+\infty$（当 $n\to\infty$ 时），因此级数

当 $a\neq\sqrt{bc}$ 时 $\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}\neq 0$，且当 $n$ 充分大时，级数的项不变号，故当 $a\neq\sqrt{bc}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$ 发散.

当 $a=\sqrt{bc}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}\right]$. 由于当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}}\to\frac{1}{8}(\ln b-\ln c)^2,$$

并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}}-c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}\right]$ 收敛，即当 $a=\sqrt{bc}$ 时，原级数收敛.

2641. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{n^a}-1)$.

**解** 当 $a\geqslant 0$ 时，$a_n=n^{n^a}-1\to\infty$（当 $n\to\infty$ 时），故级数发散.

当 $-1\leqslant a<0$ 时，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^a}-1}{\frac{1}{x^{|a|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}-1}{\frac{1}{x^{|a|}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\frac{1}{x^{|a|+1}}-|a|\cdot\frac{\ln x}{x^{|a|+1}}\right)}{-|a|\cdot\frac{1}{x^{|a|+1}}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}(\ln x-|a|^{-1})=+\infty,$$

故对于 $a_n=n^{n^a}-1$，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|a|}}}\to\infty.$$

因此,存在常数 $k>0$,使 $a_n\geqslant k\cdot\frac{1}{n^{|a|}}$,但当 $|a|\leqslant 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{|a|}}$ 发散,从而当 $-1\leqslant a<0$ 时,原级数发散.

当 $a<-1$ 时,取 $\beta$ 使 $a<\beta<-1$,于是 $|a|>|\beta|>1$. 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{x^a}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}-1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\frac{1}{x^{|a|+1}}-|a|\cdot\frac{\ln x}{x^{|a|+1}}\right)}{-|\beta|\cdot\frac{1}{x^{|\beta|+1}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x^{|a|}}}\left(\left|\frac{a}{\beta}\right|\frac{\ln x}{x^{|a|-|\beta|}}-\frac{1}{|\beta|}\cdot\frac{1}{x^{|a|-|\beta|}}\right)$$

$$=0,$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}}=0,$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛,从而当 $a<-1$ 时,原级数收敛.

2642. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\frac{1}{n^a}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^a}\right)\right]$.

**解** $a_n=\ln\frac{1}{n^a}-\ln\left(\sin\frac{1}{n^a}\right)$. 显然必须设 $a\geqslant 0$. 因若 $a<0$,则对于某些 $n$, $\ln(\sin n^{-a})$ 可能无意义. 当 $a=0$ 时,

$a_n=-\ln\sin 1=$常数$>0(n=1,2,\cdots)$，故此时级数发散，当 $a>0$ 时，将 $a_n$ 改写为

$$a_n=\ln\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}=\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\ln\left[1+\left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin\frac{1}{n^a}}-1\right)\right]^{\frac{\sin\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a}-\sin\frac{1}{n^a}}}.$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^a}{\sin x^a}-1}{x^{2a}}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{\sin y}-1}{y^2}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^2\sin y}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^3}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{3y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{6y}=\frac{1}{6},$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{2a}}}=\frac{1}{6}.$$

从而得知：当 $2a>1$ 即 $a>\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

而当 $2a\leqslant 1$ 即 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2643. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}\ (a>0)$.

**解** $a_n=a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$. 当 $a=1$ 时，显然 $a_n=1$，因而级数发散. 当 $a\neq 1$ 时，考虑

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=(b+c\ln n)\ln a.$$

利用 2615 题的结果(对数判别法),即知:

(1)当 $c=0$,$b\ln a>1$,即 $a^b>e$ 时,原级数收敛;而当 $c=0$,$b\ln a\leqslant 1$,即 $a^b\leqslant e$ 时,原级数发散.

(2)当 $c\neq 0$,$c\ln a>0$,即 $a^c>1$ 时,原级数收敛;而当 $c\neq 0$,$c\ln a<0$ 即 $a^c<1$ 时,原级数发散.

综上所述,仅当 $c=0$,$a^b>e$ 及 $a^c>1$ 时,原级数收敛.

2644. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}(a>0,b>0)$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}}{\frac{1}{n^{a+b}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{a}{n})^{n+b}(1+\frac{b}{n})^{n+a}}=\frac{1}{e^a\cdot e^b}$$

$$=e^{-(a+b)},$$

故当 $a+b>1$ 时,级数收敛;而当 $a+b\leqslant 1$ 时,级数发散.

2645. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$.

**解** $a_n=\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdots(2n)!}$. 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+2)^n}{(n+3)\cdots(2n+2)}<\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2-2}\right]^{-1}\to\frac{1}{e}<1$$

（当 $n\to+\infty$ 时），

于是由 2592 题的结论知原级数收敛.

研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性，其通项如下：

**2646.** $u_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$

**解** 由于

$$0<u_n\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{n^{-\frac{1}{2}}}{1}dx=n^{-\frac{3}{2}},$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

**2647.** $u_n=\dfrac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$.

**解** 由于

$$0<u_n\leqslant\frac{1}{\int_0^n x\,dx}=\frac{2}{n^2}$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

**2648.** $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

**解** 由于

$$u_n\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2(n+1)}>0,$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

**2649.** $u_n=\int_n^{n+1}e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

**解** 由于

$$0<u_n\leqslant e^{-\sqrt{n}},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt{n}}$ 是收敛的*)，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

*)事实上，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}=0$，利用比较判别法即获证.

2650. $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3x}{1+x}dx$.

**解** 由于函数 $\sin^3x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{n}\right)$ $(n\geqslant2)$ 内是单调增加的，故有

$$0\leqslant u_n\leqslant\frac{\sin^3\frac{\pi}{n}}{1+0}\cdot\frac{\pi}{n}\leqslant\left(\frac{\pi}{n}\right)^4\qquad(n\geqslant2).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-4}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2651. $u_n=\frac{1!+2!+\cdots+n!}{(2n)!}$.

**解** 由于

$$0<u_n\leqslant\frac{n\cdot n!}{n!\ (n+1)\cdots(2n)}=\frac{n}{(n+1)\cdots(2n)}$$

$$<\frac{1}{(2n-1)\cdot2n}\text{（当 }n\text{ 足够大）},$$

且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot2n}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2652. $u_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln^2k}{n^a}$.

**解** 首先，我们证明：当 $\alpha>2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 事实上，

$$0<u_n\leqslant\frac{n\ln^2 n}{n^\alpha}=\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}},$$

取 $\delta>0$ 使 $\alpha-1-\delta>1$，由于

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}=\frac{\frac{\ln^2 n}{n^\delta}}{n^{\alpha-1-\delta}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n^\delta}=0$，故当 $n$ 充分大时，有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}}\leqslant\frac{C}{n^{\alpha-1-\delta}}\quad (C\text{ 为正的常数}).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1-\delta}}$ 收敛，故当 $\alpha>2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

其次，我们证明：当 $\alpha\leqslant 2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 事实上，当 $n$ 充分大时，有

$$u_n\geqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln k}{n^2}=\frac{\ln n!}{n^2}.$$

因为当 $1\leqslant r\leqslant n$ 时，$(n-r)(r-1)\geqslant 0$，故有

$$r(n-r+1)\geqslant n.$$

令 $r=1$，得 $\quad 1\cdot n=n;$

$r=2$，得 $\quad 2(n-1)\geqslant n;$

$\cdots\cdots$

$r=n$，得 $n\cdot 1=1.$

连乘得

$$(n!)^2 \geqslant n^n \qquad \text{或}\ n! \geqslant n^{\frac{n}{2}}.$$

利用上述不等式，可得

$$u_n \geqslant \frac{\ln n^{\frac{n}{2}}}{n^2} = \frac{\ln n}{2n} > \frac{1}{n} > 0 \quad (\text{当}\ n \geqslant n_0\ \text{时}),$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用对应的级数来代替叙列 $x_n(n=1,2,\cdots)$，然后研究它们的收敛性，设：

**2653.** $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

**解** 
$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，记 $x_0 = 0$，故

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \to \infty$ 时的极根存在，即叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

**2654.** $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

**解** $x_n - x_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\{(\ln n)^2 - [\ln(n-1)]^2\}$

$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\ln\frac{n}{n-1}\cdot\ln[n(n-1)]$$

$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left[\ln n^2+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[2\ln n-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{\ln n}{n}-\left\{\frac{\ln n}{n}+O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right\}=O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

考虑级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$. 由级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$的收敛性可知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$收敛，于是

$$x_n=\sum_{k=2}^{n}(x_k-x_{k-1})$$

当$n\to\infty$时的极限存在，即叙列$\{x_n\}$收敛.

2655. 假如

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$;　　(б)[+] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$ *;

(в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}$,

约需取级数的多少项来求级数的和方可精确到$10^{-5}$.

**解** (a) 余项 $R_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

$$=\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{N}.$$

欲精确到$10^{-5}$，只要$\frac{1}{N}<10^{-5}$，即只要

---

* 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明，中译本基本是按俄文第二版翻译的，俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

(в) 余项 $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$. 仍用不等式

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k \qquad (k=1,2,\cdots),$$

则有

$$R_N < \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2n-1}\right)^{2n-1} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2n-1}$$

$$= \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2l}.$$

取 $N \geqslant 1$, 则 $\frac{e}{2N+1} < 1$, 故有

$$R_N < \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \frac{1}{1-\left(\frac{e}{2N+1}\right)^2}.$$

今取 $N=5$, 则有

$$R_N < \left(\frac{e}{11}\right)^{11} \cdot \frac{121}{113.614} \approx 10^{-6.6374} < 10^{-5},$$

即此级数取 $N \geqslant 5$ 项求和就可保证精确到 $10^{-5}$.

## § 2. 变号级数收敛性的判别法

1° **级数的绝对收敛性**　　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

称为绝对收敛, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

收敛. 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛, 绝对收敛级数的和与项相加的顺序无关.

要确定级数(1)的绝对收敛性, 只须把对于同号级数收敛性的已知

判别法应用于级数(2)就够了.

若级数(1)收敛,而级数(2)发散,则称级数(1)为条件收敛(非绝对收敛). 条件收敛级数的各项顺序加以改变后可使其和等于任何数(黎曼定理).

2° 莱布尼兹判别法　交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 \cdots\cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$$

($b_n \geqslant 0$)收敛(一般说来,非绝对地),若(a) $b_n \geqslant b_{n+1}$ ($n = 1, 2, \cdots$) 和(6) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 在这种情形下,对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \qquad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3° 亚伯耳判别法　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

收敛,若1),级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,2)数 $b_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) 形成一单调并有界的叙列.

4° 迪里黑里判别法　级数(3)收敛若:1)部分和 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 是有界的;2)当 $n \to \infty$ 时 $b_n$ 单调地趋近于零.

**2656.** 证明:可把非绝对收敛级数的各项不变更其顺序而分群组合起来使所得的新级数绝对收敛.

**证**　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数. 利用哥西准则,即知:

对于给定的 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$,存在 $N_1$,使对于任意自然数 $m_1$,有

$$|a_{N_1+1} + \cdots a_{N_1+m_1}| < \varepsilon_1;$$

对于给定的 $\varepsilon_2=\frac{1}{2^2}$，存在 $N_2$（可取 $N_2>N_1$），使对于任意自然数 $m_2$，有

$$|a_{N_2+1}+\cdots+a_{N_2+m_2}|<\varepsilon_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

对于给定的 $\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}$，存在 $N_k$（可取 $N_k>N_{k-1}$），使对于任意自然数 $m_k$，有

$$|a_{N_k+1}+\cdots+a_{N_k+m_k}|<\varepsilon_0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

令 $A_0=a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}$,

$A_1=a_{N_1+1}+a_{N_1+2}\cdots+a_{N_2}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$A_k=a_{N_k+1}+a_{N_k+2}+\cdots+a_{N_k+1}$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

则有 $|A_k|<\varepsilon_k=\frac{1}{2^k}(k=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 是原级数的各项不变更其顺序而分群组合起来所得的新级数. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

收敛，故级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|A_k|$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 绝对收敛. 证毕.

**2657.** 设有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，若(a) 当 $n\to\infty$ 时，此级数的通项 $a_n$ 趋于零；(б) 由组合已给级数的各项但不变更原有顺序所得的某一级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛；(в) 在项 $A_n=\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i(p_1<$

$p_2 < \cdots$）中相加项 $a_i$ 的数目是有界的，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

证　设 $A_n$ 中相加项的数目不超过某一固定的自然数 $m$，即

$$p_{n+1} - p_n \leqslant m \quad (n = 1,2,\cdots).$$

任给 $\varepsilon > 0$，考虑 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2m+1} > 0$. 由 $a_n \to 0$（当 $n \to \infty$ 时），故存在 $N'$，使当 $n \geqslant N'$ 时，有

$$|a_n| < \varepsilon_1.$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的收敛性知，存在 $N_1 \geqslant N'$，使当 $n \geqslant N_1$ 及 $p$ 为任意自然数时，有

$$|A_n + A_{n+1} + \cdots + A_{n+p}| < \varepsilon_1.$$

今取 $N = p_{N_1}$，当 $n \geqslant N$ 时，对任意自然数 $s$，考察 $\Delta_{n,s} = a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+s}$，注意每一个 $a_i$ 必属于某一个 $A_k$. 记 $A_n$ 内各项 $a_i$ 元素的集合为 $\tilde{A}_n$，即知：当 $i < j$ 时，若 $a_i \in \tilde{A}_k$，$a_j \in \tilde{A}_l$，则必有 $k \leqslant l$. 今在 $\Delta_{n,s}$ 中看各项. 显然 $a_n \in \tilde{A}_{N_1+r}$ $(r \geqslant 0)$. 再看以后各项，便有

$$\Delta_{n,s} = B + A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q} + B'$$

其中 $B = a_n + \cdots + a_{p_{N_1+r+1}} - 1$，$B' = a_{p_{N_1+r+q+1}} + \cdots + a_{n+s}$. 很明显，$B$ 是 $A_{N_1+r}$ 中一部分项之和，$B'$ 是 $A_{N_1+r+q+1}$ 中一部分项之和，于是（注意 $n \geqslant N \geqslant N_1 \geqslant N'$）

$$|B| \leqslant (p_{N_1+r+1} - p_{N_1+r})\varepsilon_1 \leqslant m\varepsilon_1,$$

$$|B'| \leqslant (p_{N_1+r+q+2} - p_{N_1+r+q+1})\varepsilon_1 \leqslant m\varepsilon_1,$$

$$|A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| < \varepsilon_1,$$

从而（当 $n\geqslant N$，$s$ 为任何自然数）

$$|\Delta_{n,s}|\leqslant|B|+|A_{N_{1+r+1}}+\cdots+A_{N_{1+r+q}}|$$
$$+|B'|<(2m+1)\epsilon_1=\epsilon.$$

根据哥西收敛准则即知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证毕.

**2658.** 证明：若将收敛级数的各项重新排列，而使每一项离开原有的位置不超过 $m$ 个位置（$m$ 为预先给定的数），则其和不变.

**证** 设原收敛级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，当然有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 又记重排出的新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，再记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 $N$ 项部分和为 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$，记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的前 $N$ 项部分和为 $\sigma_N=\sum\limits_{n=1}^{N}b_n$. 当然有 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N=S$. 今证 $\sigma_N$ 的极限也存在，且等于 $S$.

考察 $\sigma_N$ 与 $S_N$ 之差

$$\Delta_N=\sigma_N-S_N.$$

任给 $\epsilon>0$，取 $\epsilon_1=\frac{\epsilon}{2m}>0$，则存在 $N_1$，使当 $n\geqslant N_1$ 时，有 $|a_n|<\epsilon_1$. 今取

$$N\geqslant N_1+2m,$$

又记 $S_k$ 内各 $a_n$ 项元素集合为 $\tilde{S}_k$，记 $\sigma_k$ 内各 $b_n$ 项元素集合为 $\tilde{\sigma}_k$，则有

$$\Delta_N=\sum b_n-\sum a_n.$$
$$b_n\in\tilde{\sigma}_N\quad a_n\in\tilde{S}_N.$$

今从 $a_1$ 查起，看 $a_1,a_2,\cdots$ 至 $a_N$，注意每一个 $a_i$ 被重排

成 $b_j$ 时，$i$ 与 $j$ 的标号差不超过 $m$. 因此，对每一个 $a_i$ 总可以在 $b_i$ 的前后各不超过 $m$ 个元素内找到一个 $b_j=a_i$. 反过来，从 $b_1$ 查起，看 $b_1,b_2,\cdots$ 至 $b_N$，对每一个 $b_j$ 总可以在 $a_j$ 的前后各不超过 $m$ 个元素内找到一个 $a_i=b_j$. 但也可能且只有那种可能：最后一段不超过 $m$ 个元素的 $a_i$，即 $a_N,a_{N-1},\cdots,a_{N-m}$ 之内若干个元素可能被迁到 $b_N$ 之后，从而在 $\sigma_N$ 内找不到搬迁元素，但个数(设为 $r$ 个)不超过 $m$. 同样，也有可能最后一段不超过 $m$ 个元素的 $b_j$，即 $b_N,b_{N-1},\cdots,b_{N-m}$ 之内若干个元素在 $\tilde{S}_n$ 内找不到搬迁元素，但个数(设为 $s$ 个)不超过 $m$. 除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应. 于是，

$$|\Delta_N| = \Big|\sum_{\substack{bn\in\tilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\tilde{S}_N}} b_n - \sum_{\substack{a_n\in\tilde{S}_N\\ a_n\notin\tilde{\sigma}_N}} a_n\Big|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{b_n\in\tilde{\sigma}_N\\ b_n\notin\tilde{S}_N}} |b_n| + \sum_{\substack{a_n\in\tilde{S}_N\\ a_n\notin\tilde{\sigma}_N}} |a_n|$$

$$< s\varepsilon_1 + r\varepsilon_1 \leqslant m\varepsilon_1 + m\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

上式中 $a_n$ 的下标 $n\geqslant N_1+m>N_1$，故 $|a_n|<\varepsilon$. 而 $b_n$ 的下标 $n\geqslant N_1+m$，记住 $b_n$ 由某 $a_i$ 搬迁而来，其下标 $i$ 在 $n$ 的前后距离不超过 $m$，故此时 $i\geqslant N_1$，因而此时 $|b_n|=|a_i|<\varepsilon_1$. 从而上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N=0,$$

也即有

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N=\lim_{N\to\infty}S_N=S.$$

从而命题获证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和：

2659. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\cdots$.

**解** $S_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\cdots(-1)^{n-2}\frac{2n-3}{2^{n-1}}$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n},$$

将上面两式相加，得

$$\frac{3}{2}S_n=1-\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{2}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-1}}$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^n}.$$

于是

$$3S_n=2-2+\frac{2}{2}-\frac{2}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{2}{2^{n-2}}$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}$$
$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{n-1}}\to\frac{2}{3}$$

(当 $n\to\infty$时)，

即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{9}.$$

因此，原级数收敛．其和为$\frac{2}{9}$.

**2660.** $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$.

**解** 显然该级数绝对收敛，从而它是收敛的，记其和为 $S$. 考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)$$
$$-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$
$$=\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}},$$

故得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{10}{7}.$$

**2661.** $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

**解** 考虑部分和 $S_m$. 当 $m=2n$ 时，有

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}-2\cdot\frac{1}{2}(C+\ln n+\varepsilon_n)^{*)}$$

$$=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n=\ln 2+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是得

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2.$$

同样，当 $m=2n+1$ 时，也有

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}S_m=\ln 2,$$

即原级数收敛，其和为 ln2.

*） 利用 146 题的结果.

2662. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$，求从已知级数把各项重排后所成级数：

(a) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$

(б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$

的和.

**解** (a)考虑部分和 $S_m$. 当 $m=3n$ 时，有

$$S_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}$$
$$+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1})$$
$$-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n})$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma_{2n}=\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)$$

$$=\frac{1}{2}l_{2n},$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{1}{2}\ln 2$. 同样有

$$S_{3n+1}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),S_{3n+2}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n\to\infty$时，它们与 $S_{3n}$有相同的极限，从而

$$\lim_{m\to\infty}S_m=\frac{1}{2}\ln 2,$$

即原级数收敛，其和为$\frac{1}{2}\ln 2$

2663. 把收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的项重排，使它成发散的.

**解** 我们这样进行重排：先取两个正项，然后取一个负项，得

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}$$

$$+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots \tag{1}$$

将上述重排后所得的级数(1)每相邻三项结合而得一个新级数，如果它发散，当然上述重排后所得的级数也发散. 由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{2}{\sqrt{4n}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}},$$

因而

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$>\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}}>0 \quad (n=1,2,\cdots).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

发散，从而，重排后所得的级数(1)也发散.

研究变号级数的收敛性：

**2664.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

**解** 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

2665. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

**解** $a_n=(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

2666. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$.

**解** 将此级数每相邻三项组合得一新级数，它是交错级数，满足莱布尼兹判别法的两个条件，因而它是收敛的. 利用 2657 题的结果，即知原级数收敛. 显然此级数仅为条件收敛.

2667. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.

**解** 由于当 $n\to\infty$时，$\frac{\ln^{100}n}{n}$单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

为有界的，故按迪里黑里判别法即知原级数收敛.

2668. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$.

**解** 将通项改写为

$$(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}=(-1)^n\frac{1}{2n}+(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}.$$

显然级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$收敛. 下面证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$ 也收敛.事实上,部分和

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{\cos 2n}{2n}-\sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\frac{2\cos 4n}{4n}$$
$$=S_N^{(1)}-S_N^{(2)}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{2n}$ 均收敛(因为当 $k\to\infty$ 时,$\frac{1}{2k}$ 单调趋于零,且

$$\left|\sum_{n=1}^{k}\cos 2n\right|=\left|\frac{\sin(2k+1)-\sin 1}{2\sin 1}\right|\leqslant\frac{1}{\sin 1},$$

故由迪里黑里判别法即获证),记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 及 $S^{(2)}$,则当 $N\to\infty$ 时,$S_N\to S^{(1)}-S^{(2)}$,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛.从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

**2669.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

**解** $(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

显见级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛,故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ 收敛.

**2670.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

**解** $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$均收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故原级数发散.

2671. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

**解** $\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})=\sin\left[n\pi\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right]$

$$=\sin n\pi\left[1+\frac{k^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

$$=\sin\left[n\pi+\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$=(-1)^n\sin\left[\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$=(-1)^n\frac{k^2\pi}{2n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k^2\pi}{2n}$条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$收敛，故原级数收敛.

2672. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

**解** 这级数首先出现三个负项，之后出现五个正项. 如此下去，若将这些相邻且具相同符号的几项合并成

一项，则所得的新级数为一交错级数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right). \quad (1)$$

容易证明不等式

$$\frac{2}{k+1}<\underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots}_{k\text{项}}$$

$$\underbrace{+\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}_{(k+1)\text{项}}<\frac{2}{k}$$

事实上，开头 $k$ 项的和小于 $k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$，而后面 $k+1$ 项的和小于 $(k+1)\cdot\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}$，所以整个和数小于 $\frac{2}{k}$. 左面的不等式可由整个和数大于 $k\cdot\frac{1}{k^2+k}+(k+1)\cdot\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{2}{k+1}$ 而得.

于是，级数(1)的通项当 $k\to\infty$ 时趋于零，并且它的绝对值单调减小，由莱布尼兹判别法即知级数(1)收敛.

注意，原级数的部分和恰好包含在级数(1)的某相邻两部分和之间，由级数(1)的收敛性知此两相邻部分和趋于同一极限，因此原级数部分和有极限，从而原级数收敛. 显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\right|$ 发散，故原级数仅为条件收敛.

2673. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

**解** 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,即通项不趋于零,故级数发散.

2674. 证明:若

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)>0,$$

则交错级数 $b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+(-1)^{n-1}b_n+\cdots(b_n>0)$收敛.

**证** 设$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=A$,我们取 $\varepsilon>0$,使得 $A-\varepsilon>0$,则存在自然数 $N$,使当 $n\geqslant N$ 时,有

$$A-\varepsilon<n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)<A+\varepsilon$$

或

$$1<1+\frac{A-\varepsilon}{n}<\frac{b_n}{b_{n+1}}<1+\frac{A+\varepsilon}{n}.$$

因此当 $n\geqslant N$ 时,$b_n>b_{n+1}$,即 $b_n$ 单调下降.

下面证明$\lim_{n\to\infty}b_n=0$. 事实上,利用 2606 题的结果即知

$$b_n=o\left(\frac{1}{n^{A-\varepsilon}}\right).$$

例如,取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$,于是,当 $n\to\infty$时,有 $b_n\to0$.

因此,交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$收敛.

研究下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

2675. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

**解** 当 $p<0$ 时,由于 $n^{-p}\to+\infty$,故级数发散.

当 $p=0$ 时,由于 $n^{-p}=1$,故级数也发散.

当 $0 < p \leqslant 1$ 时，由于 $a_n > a_{n+1}$ 且 $a_n \to 0$（其中 $a_n = \frac{1}{n^p}$），故此交错级数收敛；然当 $0 < p \leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散，故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 仅为条件收敛.

当 $p > 1$ 时，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 绝对收敛.

2676. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

**解** 首先研究此级数当 $p$ 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

且当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，故当 $p > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 绝对收敛.

当 $p \leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

下面研究当 $0 < p \leqslant 1$ 时原级数的收敛性，将通项改写成 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 当 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛，而叙列 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 为一单调上升且趋于 1 的叙列，故由亚伯耳判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

收敛. 但因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 当 $0<p\leqslant 1$ 时发散，故当 $0<p\leqslant 1$ 时，原级数仅为条件收敛.

2677. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

**解** $\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right)$.

考虑级数

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$, (2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$, (3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3p}}$.

显然当 $p>1$ 时，级数(1)，(2)，(3)均绝对收敛，故当 $p>1$ 时，原级数绝对收敛.

当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，级数(1)条件收敛，级数(2)及(3)均绝对收敛，故当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时原级数条件收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，由于通项不趋于零，故原级数发散.

最后，设 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$. 令 $m$ 是满足

$$mp\leqslant 1<(m+1)p$$

的唯一正整数(显然 $m\geqslant 2$). 我们有

$$\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2p}}$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{4p}}+\cdots+(-1)^{m-1}$$
$$\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}}+O\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right).$$

若 $m$ 为偶数，则由于交错级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geqslant a \text{ 或 } |a_n| \geqslant a^n > 1,$$

上式表明，当 $n \to \infty$ 时，$a_n$ 并非趋于零，故此时原级数发散.

**2679.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

**解** 当 $x$ 为负整数时，级数显然无意义.

当 $x$ 不为负整数时，此交错级数满足莱布尼兹判别法的条件，故它是收敛的. 但因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ 发散，故原级数当 $x$ 不为负整数时仅为条件收敛.

**2680.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

**解** $$\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p} = \frac{(-1)^n}{n^p\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^p}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^p}\left[1 - \frac{p \cdot (-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right).$$

当 $0 < p \leqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+2}}$ 绝对收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 当 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛.

当 $p > 1$ 时，由 $\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p \leqslant 0$ 时，通项不趋于零，原级数显然发散.

2681. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^{p}}$.

**解** 由于

$$\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^{p}}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]^{-p}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}-\frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right), \qquad (1)$$

故原级数当 $p>2$ 时绝对收敛；而当 $p\leqslant 0$ 时原级数显然发散．下面我们再来研究当 $0<p\leqslant 2$ 时原级数的收敛性．

当 $1<p\leqslant 2$ 时，由(1)式第一项组成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$ 条件收敛，而由第二项、第三项组成的级数显然收敛，故此时原级数条件收敛．

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由第一项及第三项组成的级数收敛，但由第二项组成的级数发散，故此时原级数发散．

2682. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

**解** $$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}+\sin\frac{n\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}\left[1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}\right]^{-1}$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}\left[1-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}+O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right]$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^{p}}-\frac{\sin^{2}\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$$

当 $2p>1$ 即 $p>\frac{1}{2}$ 时，由第二项及第三项所组成的级数均收敛，而对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ 且 $\frac{1}{n^p}$ 单调减小，又

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},$$

故由迪里黑里判别法知它是收敛的. 从而当 $p>\frac{1}{2}$ 时，原级数收敛. 又因 $\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^p}$，且当 $\frac{1}{2}<p\leqslant1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛，故当 $\frac{1}{2}<p\leqslant1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}$ 发散，从而此时原级数条件收敛.

当 $p>1$ 时，由 $\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}=O(\frac{1}{n^p})$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p\leqslant0$ 时，原级数显然发散.

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由于

$$\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{8}}{2n}\geqslant0,$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{8}}{2n}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n}$ 发散，从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ 发散. 再仿 2677 题 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 情形之证，即易知原级数发散.

2683. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

**解** 通项为

$$a_n=(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$$

$$=(-1)^n\frac{1}{\sqrt[100]{n}}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}+O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right).$$

显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$ 绝对收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ 条件收敛，故原级数条件收敛.

2684. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{100}}{2^n}$,

**解** 考虑绝对值组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{n^{100}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}=\frac{1}{2}<1,$$

故原级数绝对收敛.

2685. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln n}{n^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}}=e^0=1,$$

从而知通项 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$ 当 $n\to\infty$ 时并不趋于零，故原级数发散.

2686. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

**解** 由于 $\frac{1}{\ln n}$ 当 $n\to\infty$ 时单调下降趋于零，又部分和

$$\left|\sum_{m=2}^{n}\sin\frac{m\pi}{12}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{24}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{24}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

有界，故级数收敛.

但是

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{12}}{\ln n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n}$$

$$=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛，故级数

$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|$发散. 从而,原级数仅为条件收敛.

2687. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

**解** 记 $A_l=\{n\mid[\sqrt{n}]=l\}(l=1,2,\cdots)$. 显然 $A_l$ 中的元素 $n$ 满足

$$l^2\leqslant n<(l+1)^2,$$

于是 $A_l$ 中元素的个数为 $2l+1$. 考虑,

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p},$$

则有

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^l}{n^p}=(-1)^l v_l,$$

其中

$$v_l=\sum_{n\in A_l}\frac{1}{n^p}.$$

当 $p>0$ 时,有

$$\begin{aligned}v_l-v_{l+1}&=\sum_{s=0}^{2l}\frac{1}{(l^2+s)^p}-\sum_{s=0}^{2(l+1)}\frac{1}{[(l+1)^2+s]^p}\\&=\sum_{s=0}^{2l}\left\{\frac{1}{(l^2+s)^p}-\frac{1}{[(l+1)^2+s]^p}\right\}\\&\quad-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p}\\&\quad-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p}\\&=\sum_{s=0}^{2l}\frac{[(l+1)^2+s]^p-(l^2+s)^p}{(l^2+s)^p[(l+1)^2+s]^p}\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+1]^p}$$

$$-\frac{1}{[(l+1)^2+2l+2]^p}.$$

考虑函数 $f(x)=x^r(r>1)$. 当 $x>y>0$ 时，由微分学中值公式，有

$$x^r-y^r=r\xi^{r-1}(x-y)\geqslant ry^{r-1}(x-y),$$

其中 $y<\xi<x$.

于是，令 $r=2p, x=\sqrt{(l+1)^2+s}, y=\sqrt{l^2+s}$,

则当 $p>\frac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}
&[(l+1)^2+s]^p-(l^2+s)^p\\
&=(\sqrt{(l+1)^2+s})^{2p}-(\sqrt{l^2+s})^{2p}\\
&\geqslant 2p\cdot(\sqrt{l^2+s})^{2p-1}\{\sqrt{(l+1)^2+s}-\sqrt{l^2+s}\}\\
&=2p(\sqrt{l^2+s})^{2p-1}\cdot\frac{2l+1}{\sqrt{(l+1)^2+s}+\sqrt{l^2+s}}\\
&\geqslant\frac{2pl^{2p-1}(2l+1)}{2\sqrt{l^2+4l+1}},
\end{aligned}$$

从而当 $p>\frac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}
v_l-v_{l+1}&\geqslant\frac{pl^{2p-1}(2l+1)^2}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}}-\frac{2}{(l^2+4l+2)^p}\\
&\geqslant\frac{2l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}{(l^2+4l+1)^{2p+\frac{1}{2}}}\\
&\quad\cdot\left[2p-\frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}\right].
\end{aligned}$$

由于 $2p>1$，而

$$\lim_{l\to+\infty}\frac{(l^2+4l+1)^{p+\frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2+l+\frac{1}{4})}=1,$$

故当 $l$ 充分大时，$v_l-v_{l+1}>0$.

于是存在 $l_0$，使当 $l\geqslant l_0$ 时，$v_l$ 是单调下降的叙列. 又当 $n\in A_l$，$p>0$ 时有

$$\frac{1}{(l+1)^{2p}}<\frac{1}{n^p}\leqslant\frac{1}{l^{2p}},$$

故

$$\frac{2l+1}{(l+1)^{2p}}<v_l\leqslant\frac{2l+1}{l^{2p}}.$$

上述不等式说明，当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$v_l$ 是单调下降且趋于零的叙列(当 $l\to+\infty$)，从而知级数

$$\sum_{l=1}^{\infty}u_l=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l v_2$$

是一个收敛级数. 显然当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 仅为条件收敛. 当 $p>1$ 时，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 绝对收敛. 当 $p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{l=1}^{\infty}u_l$ 发散.

现在看原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_n=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. 记其部分和为 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$，又记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和为 $\sigma_M=\sum\limits_{n=1}^{M}u_n$. 那末任意一个部分和 $S_N$ 均被包含在某相邻两个部分和 $\sigma_M$ 与 $\sigma_{M+1}$ 之间，即有

$$|S_N-\sigma_M|\leqslant|\sigma_{M+1}-\sigma_M|.$$

注意，当$\frac{1}{2}<p\leqslant1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛，而当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛. 此时记其和为$\sigma$，则有

$$\lim_{M\to\infty}\sigma_M=\sigma.$$

因此，

$$\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{M\to\infty}\sigma_M=\sigma,$$

也即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$有同样的收敛结论. 从而当$\frac{1}{2}<p\leqslant1$时，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛；当$p>1$时绝对收敛，当$p\leqslant\frac{1}{2}$时发散（否则这时的$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛），其中当$p=1$时就是2672题.

2688. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

**解** 记$a_n=\frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$. 为研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性，我们引进集合

$$A_k=\{n\,|\,[\ln n]=k\}\quad(k=1,2,\cdots).$$

那末集合$A_k$内的元素$n$具有性质

$$k\leqslant\ln n<k+1,$$

或写成

$$e^k\leqslant n<e\cdot e^k$$

其个数$p_k=[(e-1)e^k]$. 将$A_k$内的元素从小到大排列，可记为

$$=|u_k|=v_k\geqslant\frac{e-1}{2e}=2\varepsilon>\varepsilon. \tag{2}$$

(1)式与(2)式矛盾. 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

2689. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p$.

**解** 设 $a_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p$.

当 $p\leqslant0$ 时, 显然 $|a_n|\geqslant1$, 故 $a_n$ 不趋于零(当 $n\to\infty$), 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

当 $0<p\leqslant2$ 时, 记 $a_n=(-1)^{n-1}b_n$, 其中

$$b_n=\left(\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right)^p.$$

由 $\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p<1$ 易知

$$b_n>\left(\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)^p b_n=b_{n+1}\qquad(n=1,2,\cdots),$$

且有(见第 10 题的不等式)

$$0<b_n<\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p\to0\quad(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

故由莱布尼兹判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 但由 2598 题的结果知, 当 $0<p\leqslant2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 于是, 当 $0<p\leqslant2$ 时, 原级数条件收敛.

当 $p>2$ 时, 由 2598 题的结果知, 原级数绝对收敛.

2690. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$.

**解** 记 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\sin n\cdot\sin n^2$. 显然 $\{a_n\}$ 单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{n=1}^{N}b_n\right|=\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}[\cos n(n-1)-\cos n(n+1)]\right|$$
$$=\left|\frac{1}{2}[\cos 0-\cos N(N+1)]\right|\leqslant 1,$$

有界（$N=1,2,\cdots$），故由迪里黑里判别法知级数收敛.

2691. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$.

**解** 我们即将指出 $\sin n^2$ 当 $n\to\infty$ 时并不趋于零，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 发散. 现用反证法，假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin n^2=0,$$

于是，$\sin^2(n^2)\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）. 由 $\sin^2(n^2)+\cos^2(n^2)=1$ 知 $\cos^2(n^2)\to 1$（当 $n\to\infty$ 时）. 由于

$$\sin(n+1)^2=\sin(n^2+2n+1)$$
$$=\sin n^2\cos(2n+1)+\cos n^2\sin(2n+1),$$

故

$$\cos^2(n^2)\sin^2(2n+1)$$
$$=[\sin(n+1)^2-\sin n^2\cos(2n+1)]^2.$$

让 $n\to\infty$，注意 $\sin n^2\to 0$，于是，由

$$\sin(n+1)^2\to 0 \text{ 及 } \cos^2(n^2)\to 1.$$

便有 $\sin^2(2n+1)\to 0$，因此 $\sin(2n+1)\to 0$. 同理可得 $\sin(2n-1)\to 0$（当 $n\to\infty$）. 又从

$$\sin(2n+1)+\sin(2n-1)=2\sin 2n\cos 1$$

知还有 $\sin 2n\to 0$（当 $n\to\infty$ 时），即有

$$\sin m\to 0\quad(\text{当 } m\to\infty \text{ 时}).$$

从而也有 $\sin^2 n\to 0$ 及 $\cos^2 n\to 1$. 但

$$\sin(n+1)=\sin n\cos 1+\cos n\sin 1,$$

或写成

$$\cos^2 n\sin^2 1=[\sin(n+1)-\sin n\cos 1]^2.$$

让 $n\to\infty$，于上式的两端取极限，并注意到 $\sin^2 1\neq 0$，$\cos^2 n\to 1$，从而产生左端为 $\sin^2 1$ 而右端为零的矛盾. 因此，假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin n^2=0$$

不真，即原命题 $\sin n^2 \not\to 0$（当 $n\to\infty$ 时）成立. 因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n^2$ 发散.

2692. 设

$$R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\cdots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q}$$

为有理函数，式中 $a_0\neq 0, b_0\neq 0$ 及当 $x\geqslant n_0$ 时，$|b_0x^q+b_1x^{q-1}+\cdots+b_q|>0$.

研究级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n R(n)$

的绝对收敛性和条件收敛性.

**解** 首先考虑绝对收敛性.

当 $q-p>1$ 即当 $q>p+1$ 时，由于

$$|R(n)|=\left|\frac{a_0+a_1n^{-1}+\cdots+a_pn^{-p}}{b_0n^{q-p}+b_1n^{q-p-1}+\cdots+b_qn^{-p}}\right|$$

$$\sim\frac{|a_0|}{|b_0|n^{q-p}},$$

而 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^nR(n)$ 绝对收敛.

当 $q \leqslant p+1$ 时，级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}|R(n)|$ 发散.

但当 $p<q$ 时，$(-1)^n R(n) \sim (-1)^n \frac{a_0}{b_0 n^{q-p}}$，容易验证原级数符合莱布尼兹判别法的条件，故当 $p<q\leqslant p+1$ 时，级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n R(n)$ 条件收敛.

当 $p\geqslant q$ 时，显见 $R(n)\to 0$（当 $n\to\infty$时），故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n R(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性：

**2693.** $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$.

**解** 当 $p>1, q>1$ 时，显然级数绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，显然级数并非绝对收敛，但由莱布尼兹判别法知级数收敛. 因此，当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，级数条件收敛.

当 $p$、$q$ 中有一个小于或等于零时，由于通项不趋于零（当 $n\to\infty$），故级数发散.

**2694.** $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots$.

**解** 当 $p>1$ 时，由于原级数是由绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ 交换项数重排而得来的，因此它也是绝对收敛的. 下面我们再讨论条件收敛性.

当 $0<p<1$ 时，考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(4n)^p(1-\frac{3}{4n})^p}+\frac{1}{(4n)^p(1-\frac{1}{4n})^p}-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(4n)^p}\left[1+\frac{3p}{4n}+1+\frac{p}{4n}+O(\frac{1}{n^2})\right]-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{2^p(2n)^p}\left[2+\frac{p}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right]-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=\frac{1}{(2n)^p}(\frac{1}{2^{p-1}}-1)+\frac{4p}{(4n)^{p+1}}$$

$$+O(\frac{1}{n^{p+2}}). \qquad (1)$$

由第一项组成的级数发散到$+\infty$，而由其余各项分别组成的级数均收敛. 因此，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 易证原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 同时收敛或同时发散(这可用部分和作比较而得)，从而当 $0<p<1$ 时，原级数发散.

当 $p=1$ 时，(1)式第一项为零，而由第二项及第三项分别组成的级数显然收敛，故当 $p=1$ 时，原级数收敛，并且显然不是绝对收敛的，即原级数条件收敛.

当 $p\leqslant 0$ 时，原级数显然发散.

2695. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\cdots$.

**解** 易证原级数与级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$同时收敛或同时发散，其中

$$u_n=\frac{1}{(4n-3)^p}+\frac{1}{(4n-1)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}$$

$$=\frac{1}{2^p(2n)^p}\left[2+\frac{p}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right]$$

$$-\frac{1}{(2n)^p}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{2n})^p}$$

$$=\frac{1}{(2n)^p}(\frac{1}{2^{p-1}}-1)+\frac{1}{2^p}(\frac{p}{2^p}-\frac{p}{2})$$

$$\cdot\frac{1}{n^{p+1}}+O(\frac{1}{n^{p+2}}). \qquad (1)$$

当 $p>1$ 时，级数显然绝对收敛.

当 $0<p<1$ 时，由(1)式第一项组成的级数发散，而由(1)式第二项及第三项所分别组成的级数均收敛. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散. 从而当 $0<p<1$ 时，原级数发散.

当 $p=1$ 时，原级数条件收敛. 事实上，此时(1)式中第一项及第二项均为零，而由第三项所组成的级数收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，从而原级数收敛. 但级数

$$1+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{5}+\cdots$$

是发散的.

当 $p\leqslant0$ 时，原级数显然发散.

**2696.** $1-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots$.

**解** 当 $p>1,q>1$ 时，记 $\delta=\min(p,q)>1$. 由于级数

$$1+\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\cdots \qquad (1)$$

的前 $N$ 项部分和 $S_N$ 有

$$S_N\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{k^\delta}=2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^\delta}<+\infty,$$

故 $\{S_N\}$ 单调上升且有界，从而 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N$ 存在. 于是，原级数当 $p>1,q>$ 时绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，由于级数(1)的 $S_N$ 有

$$S_N \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \to +\infty (\text{当 } N \to +\infty \text{ 时}),$$

故原级数并不绝对收敛. 但当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，可考虑级数 $(1-\frac{2}{2^p})+\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ ，其中

$$\begin{aligned}
u_k &= \frac{1}{(3k)^p}+\frac{1}{(3k+1)^p}-\frac{2}{(3k+2)^p} \\
&= \frac{1}{(3k)^p}\left[1-(1+\frac{2}{3k})^{-p}\right] \\
&\quad + \frac{1}{(3k+1)^p}\left[1-(1+\frac{1}{3k+1})^{-p}\right] \\
&= \frac{1}{(3k)^p}\left[\frac{p}{3k}+O(\frac{1}{k^2})\right] \\
&\quad + \frac{1}{(3k+1)^p}\left[\frac{p}{3k+1}+O(\frac{1}{k^2})\right] \\
&= \frac{2p}{(3k)^{p+1}}+\frac{2p}{(3k+1)^{p+1}}+O(\frac{1}{k^{p+2}}) \\
&= \frac{3p}{(3k)^{p+1}}+O(\frac{1}{k^{p+2}}).
\end{aligned}$$

因此，显然 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛. 易证原级数与级数 $(1-\frac{2}{2^p})+\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 同时收敛或同时发散. 因而原级数当 $0<p=q\leqslant 1$ 时条件收敛.

当 $p,q$ 中有一个小于或等于零时，原级数显然发散.

**2697.** 证明：级数

(a) $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\cdots,$

(б) $\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\cdots$

在区间$(0,\pi)$内不绝对收敛.

证 (a) $\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1-\cos 2nx}{2n}$

$$=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n}.$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散到$+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$收敛(这是因为$\frac{1}{2n}$单调趋于零，且$\sum_{n=1}^{N}\cos 2nx$有界，故由迪里黑里判别法即获证)，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$$

在$(0,\pi)$内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛.

(б)可用(a)的方法证明. 事实上，由

$$\left|\frac{\cos nx}{n}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{\cos 2nx}{2n}$$

即知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n}\right|$$

在$(0,\pi)$内发散. 至于原级数的收敛性是显然的.

因此，原级数在$(0,\pi)$内仅为条件收敛.

2698. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\ (0<x<\pi)$$

对全体参数$(p,x)$定出：(a)绝对收敛域；(б)非绝对收敛域.

**解** 当 $p>1$ 时，由于

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p},\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}(0<x<\pi),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故这两个级数当 $p>1$ 时，对于 $(0,\pi)$ 内任一 $x$ 值均绝对收敛.

当 $0<p\leqslant1$ 时，由于 $\frac{1}{n^p}$ 单调下降趋于零，且部分和 $\sum_{n=1}^{N}\cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^{N}\sin nx$ 均有界 $(0<x<\pi)$，故由迪里黑里判别法知两级数均收敛. 但绝对值组成的级数均发散，事实上，

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant1$ 时发散到 $+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant1$ 时收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0<p\leqslant1$ 时均发散. 因此，当 $0<p\leqslant1$ 时，对于 $(0,\pi)$ 内任一 $x$ 值，级数，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛.

当 $p\leqslant0$ 时，两级数显然发散.

总之，当 $0<x<\pi$ 时，两级数的(a)绝对收敛域为 $p>1$；(б)条件收敛域为 $0<p\leqslant1$.

$$a_n=\frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!\,n^{p+\varepsilon}},$$

取对数，有

$$\begin{aligned}\ln a_n&=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{p}{k}\right)-(p+\varepsilon)\ln n\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{p}{k}+\sum_{k=1}^{n}O\left(\frac{1}{k^2}\right)-(p+\varepsilon)\ln n\\&=p\ln n+pr+A_1+O\left(\frac{1}{n}\right)-p\ln n-\varepsilon\ln n\\&=pr+A_1+O\left(\frac{1}{n}\right)-\varepsilon\ln n\to-\infty\end{aligned}$$

（当 $n\to+\infty$ 时），

其中 $r$ 及 $A_1$ 为某些常数，从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 由莱布尼兹判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛. 因此，当 $p<q\leqslant p+1$ 时，原级数条件收敛.

当 $q=p$ 时，有

$$\ln a_n=pr+A_1+O\left(\frac{1}{n}\right)\to pr+A_1\text{（当 }n\to\infty\text{时）},$$

也即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{pr+A_1}\neq0$，原级数发散.

当 $q<p$ 时，对于足够大的 $n$ 有 $a_n<a_{n+1}$，可见通项也不趋于零，故原级数也发散.

总之，(a)级数的绝对收敛域为 $q>p+1$；

(6)级数的条件收敛域为 $p<q\leqslant p+1$.

2700. 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$$

的收敛性，其中 $\binom{m}{n}=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

**解** 记 $a_n=\binom{m}{n}$，有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{n+1}{m-n}\right|$$
$$=\left|(1+\frac{1}{n})\left[1+\frac{m}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right]\right|$$
$$=1+\frac{m+1}{n}+O(\frac{1}{n^2}),$$

故由高斯判别法知：当 $m+1>1$ 即当 $m>0$ 时，级数绝对收敛. 当 $m<0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散. 至于当 $m=0$ 时，级数每一项为零，因此，级数显然绝对收敛.

下面我们证明：当 $-1<m<0$ 时，级数收敛，从而知级数条件收敛. 事实上，当 $n$ 足够大之后，易见 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\binom{m}{n}$ 为交错级数. 又因 $-1<m<0$，故 $\left|\frac{m-n}{n+1}\right|<1$，它等价于 $|a_{n+1}|<|a_n|$，这表明级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 的通项的绝对值是单调减少的. 现在再证明 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$. 为此，取对数，有

$$\ln|a_n|=\ln\left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\right|$$
$$=\ln\left|\left(1-\frac{m+1}{1}\right)\left(1-\frac{m+1}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{m+1}{n}\right)\right|$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{m+1}{k}\right).$$

由于当 $k\to\infty$ 时，$\ln(1-\frac{m+1}{k})\Big/(-\frac{m+1}{k})\to 1$，而 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散到 $+\infty$，故 $\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{m+1}{k})$ 发散到 $-$

$\infty$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$. 由莱布尼兹判别法知$\sum\limits_{n=n}^{\infty}a_n$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛.

当 $m \leqslant -1$ 时，由于级数的通项不趋于零，故级数发散.

总之，当 $m \geqslant 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$绝对收敛；当 $-1 < m < 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n}$条件收敛.

2701. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = 1,$$

则可否断定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛？

**解** 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$均为正项级数，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛可断定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛. 但当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$不一定都是正项级数时，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性不能断定$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛. 例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

是收敛的，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=1,$$

但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$$

却是发散的.事实上,它是由收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$及发散级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$相加而得的,故它是发散的.

2702. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为非绝对收敛的级数及

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2},N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2},$$

证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$

证 首先注意,非绝对收敛即条件收敛,若级数发散,本命题不一定成立. 例如,取$a_i=1$,则$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=0$;若$a_i=1$(当$i\equiv1(\mathrm{mod}2)$时)或$a_i=-\frac{1}{2}$(当$i\equiv0(\mathrm{mod}2)$时),此时将有$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=\frac{1}{2}$,等等,

当级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛时,有

$$\frac{N_n}{P_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}|a_i|-\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|+\sum_{i=1}^{n}a_i}=\frac{1-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}{1+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}}$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛及$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=+\infty$,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{\sum_{i=1}^{n}|a_i|}=0,$$

从而即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$$

2703. 证明:对于每一个$p>0$,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和是在$\frac{1}{2}$与1之间.

**证** 首先,由于此级数的前$2n$项的和

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right)$$

中每一个括号内的数大于零,故$\{S_{2n}\}$是一个单调上升的叙列. 又因

$$S_{2n}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)-\cdots$$

$$-\left(\frac{1}{(2n-2)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}\right)-\frac{1}{(2n)^p}<1,$$

故$\{S_{2n}\}$是以 1 为上界的叙列．从而知$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$存在且不超过 1.

由于此级数当 $p>0$ 时是收敛的，故对于叙列$\{S_{2n}\}$，它的极限与级数的和相等，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\leqslant 1 \quad (p>0)$$

（对于 $p=1$，此级数的和为 $\ln 2$）.

其次，我们证明此和不小于$\frac{1}{2}$，仍考虑前 $2n$ 项的部分和 $S_{2n}$，则有 $S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\tilde{S}_{2n}$，其中

$$\tilde{S}_{2n}=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}\right]$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$

这里 $0<\theta_k<1(k=2,3,\cdots,n)$．由于 $p>0$ 以及

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}}\geqslant\frac{1}{(2k)^{p+1}}(k=2,3,\cdots).$$

即得

$$\tilde{S}_{2n}\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k)^{p+1}}=\frac{p}{2^{p+1}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{p+1}}$$

$$\geqslant\frac{p}{2^{p+1}}\left[\int_2^n\frac{dx}{x^{p+1}}+\frac{1}{n^{p+1}}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{p+1}}\left(-\frac{1}{px^p}\bigg|_2^n+\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} + \frac{p}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p}(1 - \frac{p}{n})$$

$$= \frac{1}{2^{2p+1}} + \Delta_n,$$

此处

$$\Delta_n = \frac{-1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p}(1-\frac{p}{n}) = O(\frac{1}{n^p})(\text{当 } n\to\infty\text{时}).$$

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N_0$，使当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $|\Delta_n|<\varepsilon$. 这时有

$$S_{2n} = 1-\frac{1}{2^p}+\tilde{S}_{2n} \geqslant 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}-\varepsilon.$$

但当 $p>0$ 时，

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2},$$

这是因为

$$2^p+\frac{1}{2^p}>2,$$

故得

$$1+\frac{1}{2^{2p}}>\frac{2}{2^p} \text{或} \frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2^p}.$$

从而

$$S_{2n}>\frac{1}{2}-\varepsilon,$$

故收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\geqslant\frac{1}{2}-\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，即得 $S\geqslant\frac{1}{2}$. 综上所述，

$$\frac{1}{2}\leqslant S\leqslant 1.$$

2704. 证明：若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

的各项重新安排，而使挨次 $p$ 个正项的一组与挨次 $q$ 个负项的一组相交替，则新级数的和为

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

**证** 按题意，我们欲证

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2q}$$
$$+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\cdots$$
$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}. \qquad (1)$$

首先，我们有

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n,$$

其中 $C$ 为尤拉常数，而 $\varepsilon_n$ 为无穷小，由此即得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}H_m=\frac{1}{2}\ln m+\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\varepsilon_m,$$

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}=H_{2k}-\frac{1}{2}H_k$$
$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln k+\frac{C}{2}+\varepsilon_{2k}-\frac{1}{2}\varepsilon_k.$$

于是，若把级数(1)的 $p$ 项或 $q$ 项的数串组合起来，考虑

$$S_{2n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{2q}$$
$$+\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{2(n-1)q}+\frac{1}{2(n-1)p+1}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2np-1}$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{2np}{2(n-1)q}+\alpha_n$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\alpha_n',$$

其中 $\alpha_n\to 0,\alpha_n'\to 0$（当 $n\to\infty$）；又因 $S_{2n+1}=S_{2n}+\beta_n$，其中 $\beta_n\to 0$（当 $n\to\infty$时），故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\ln 2$. 从而级数(1)的和为 $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

2705. 证明：若将调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

之项的符号改变使得 $p$ 个正项之后跟随着 $q$ 个负项($p\neq q$)，但不变更原来的顺序，则此级数始终是发散的．仅当 $p=q$ 时为收敛的．

**证** 若 $p\neq q$，不妨设 $p>q$，记

$$a_k=\frac{1}{(p+q)k+1}+\cdots+\frac{1}{(p+q)k+p}-\frac{1}{(p+q)k+p+1}-\cdots-\frac{1}{(p+q)k+p+q}.$$

由于其中正项的项数比负数的项数为多，且所有正项中任一项均比任一负项的绝对值为大，故有

$$a_k>\frac{1}{(p+q)k+1}>0\quad(k=1,2,\cdots).$$

但 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散，故 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k$ 发散，从而比较一下即知所得级数发散(若 $p<q$ 同理可证).

若 $p=q$，记

其和$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛，得出矛盾．于是，此时两级数的和一定发散．

(6) 可为收敛，可为发散．例如：

(1) 设$a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$及$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$均发散，但$c_n = 0$，故$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，

(2) 设$a_n = b_n = \frac{1}{n}$，则$c_n = \frac{2}{n}$．显见，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

均发散．

2707. 求二级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right].$$

**解** 两级数显然是收敛的．因此，它们的和也是收敛的．逐项相加，即可求得两级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{4}{3^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

求下列级数的和：

2708. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

**解** 此级数是由两收敛级数逐项相加而得的，因此它是收敛的，且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+(-\frac{1}{3})$$

$$\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{3}{4}.$$

2709. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

**解** 原级数显然绝对收敛，记其和为 $S$，则有

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1.$$

设将 $n=0,1,2,\cdots$ 分成三类：

$A_1=\{n\mid n=3k,k=0,1,2,\cdots\}$，

$A_2=\{n\mid n=3k+1,k=0,1,2,\cdots\}$，

$A_3=\{n\mid n=3k+2,k=0,1,2,\cdots\}$，

则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{n\in A_1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$

$$+\sum_{n\in A_2}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_3}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi+\frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2^2}\cos(\pi+\frac{\pi}{3})\right]\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2^3})^k$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7},$$

以上计算是合理的，因为上述三个级数均绝对收敛，故其和为$\frac{5}{7}$. 从而知原级数的和为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1$$

$$= \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}.$$

2710$^+$. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (|xy| < 1)$.

**解** 设将 $n=0,1,2,\cdots$分成二类：

$A_1 = \{n \mid n = 2k, k = 0,1,2,\cdots\}$,

$A_2 = \{n \mid n = 2k+1, k = 0,1,2,\cdots\}$,

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \sum_{n \in A_1} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} + \sum_{n \in A_2} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^{k+1}.$$

显然上式右端两级数当 $|xy| < 1$ 时绝对收敛，故原级数收敛，且其和为

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} = \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k$$

$$= (1+y) \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}.$$

2711. 证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1.$$

证　此两级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 均绝对收敛，其中

$$a_n=\frac{1}{n!},b_n=\frac{(-1)^n}{n!},$$

故可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中

$$\begin{aligned}c_n&=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{1}{i!}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!}\right]\\&=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}\\&=\frac{1}{n!}(1-1)^n=0\quad(n=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

从而知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n=1.$$

当然，由 $e$ 的定义知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e\text{ 及 }\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=e^{-1},$$

从而也就可以直接计算得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=e\cdot e^{-1}=1.$$

**2712.** 证明：

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n\ (|q|<1).$$

**证** 由 $|q|<1$ 知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ 绝对收敛，故可写成

$$(\sum_{n=0}^{\infty}q^n)^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n,$$

其中

$$c_n=\sum_{i=0}^{n}q^i\cdot q^{n-i}=q^n\cdot\sum_{i=0}^{n}1=(n+1)q^n$$

$$(n=0,1,2\cdots).$$

因此，

$$(\sum_{n=0}^{\infty}q_n)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

2713. 证明：收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散级数．

**证** 如果此级数的平方收敛，则可写其积为 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$，即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{1}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+(-\frac{1}{\sqrt{2}})\cdot\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}}$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}}$$

$$+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1}$$

$$=(-1)^{n+1}(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1}).$$

由于括号中的每一项都大于$\frac{1}{n}$ *)，故 $|c_n|>1$，这与级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛相矛盾．因此，级数$(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}})^2$发散．

*) 只要证 $k(n-k+1)<n^2$ 或 $n^2-nk+k^2-k>0$. 由于

$$n^2-nk+k^2-k=(n-\frac{k}{2})^2+\frac{3k^2-4k}{4},$$

故只要证 $3k^2-4k>0$. 但 $3k^2-4k=3k(k-\frac{4}{3})$，可见对于 $k=2,3,\cdots$上式成立．至于当 $k=1$ 时，显然有 $1\cdot(n-1+1)=n\leqslant n^2$ 或$\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}}\geqslant\frac{1}{n}$. 因而不等式 $k(n-k+1)<n^2$ 成立．

**2714.** 证明：下面二级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}(\alpha>0)\text{ 及 }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}(\beta>0)$$

的积当 $\alpha+\beta>1$ 时是收敛级数，而当 $\alpha+\beta<1$ 时是发散级数．

**证** 记

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(\alpha>0,\beta>0).$$

按乘法法则应有

$$c_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{(n-i+1)^\beta}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i+j=n+1}}\frac{1}{i^\alpha j^\beta} = (-1)^{n-1}d_n,$$

其中

$$d_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}(n=1,2\cdots).$$

(1) 当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时，有

$$d_n \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant \frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$\geqslant \frac{1}{(\frac{n}{2})^\alpha}\sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{(n-i+1)^\beta}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha}\sum_{\frac{n}{2}<j\leqslant n}\frac{1}{j^\beta} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha}\int_{\frac{n}{2}}^{n}\frac{dt}{t^\beta}$$

$$=2^\alpha\cdot\frac{1}{1-\beta}\left(1-\frac{1}{2^{1-\beta}}\right)n^{1-(\alpha+\beta)}.$$

于是，当 $\alpha+\beta<1$ 时，$d_n\to+\infty$（当 $n\to\infty$时）；当 $\alpha+\beta=1$ 时，$d_n\geqslant 2^\alpha\cdot\frac{1}{1-\beta}(1-\frac{1}{2^{1-\beta}})>0$，即当 $\alpha+\beta\leqslant 1$ 时，$d_n$ 不趋于零（当 $n\to\infty$时），从而知

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}d_n$$

为发散级数．

(2) 当 $\alpha+\beta>1$ 时，有

$$d_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta} + \sum_{\frac{n}{2}\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{i^\alpha(n-i+1)^\beta}$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

其中

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{i^{\alpha}(n-i+1)^{\beta}}$$

$$\leqslant \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^{\beta}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} \frac{1}{i^{\alpha}}$$

$$\leqslant \frac{1}{(\frac{n}{2}+1)^{\beta}} \left(1 + \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha}}\right)$$

$$= O(\frac{1}{n^{\beta}}) + O\left(n^{-\beta} - \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha}}\right)$$

$$= O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}),$$

同理有

$$\sum\nolimits_2 \leqslant O(n^{-\alpha}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}).$$

由于 $\alpha > 0, \beta > 0, 1-(\alpha+\beta) < 0$，故有 $d_n$ 趋于零：

$$d_n \leqslant O(n^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}) \to 0$$

（当 $n \to \infty$ 时）.

记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和为

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

考虑原两级数的部分和

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}}, B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\beta}}.$$

今考察下列差数

$$\Delta_n = A_n B_n - S_n$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i^{\alpha}}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j^{\beta}}\right) - S_n$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j^{\beta}}\right)\\
&\quad-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ i+j=k+1}}\frac{1}{i^{\alpha}j^{\beta}}\\
&=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i^{\alpha}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j}}{j^{\beta}}\right)\\
&\quad-\sum\sum_{\substack{2\leqslant i+j\leqslant n+1\\ 1\leqslant i,j\leqslant n}}\left(\frac{(-1)^{i}}{i^{\alpha}}\right)\left(\frac{(-1)^{j}}{j^{\beta}}\right).\\
&=\sum_{s=1}^{2n-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ i+j=s+1}}\frac{(-1)^{s+1}}{i^{\alpha}j^{\beta}}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ i+j=k+1}}\frac{(-1)^{k-1}}{i^{\alpha}j^{\beta}}\\
&=\sum_{s=n+1}^{2n-1}(-1)^{s-1}\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ i+j=s+1}}\frac{1}{i^{\alpha}j^{\beta}}.
\end{aligned}
$$

为估计上述差数各项，可看下列乘法表(图 5.1)．$A_nB_n$

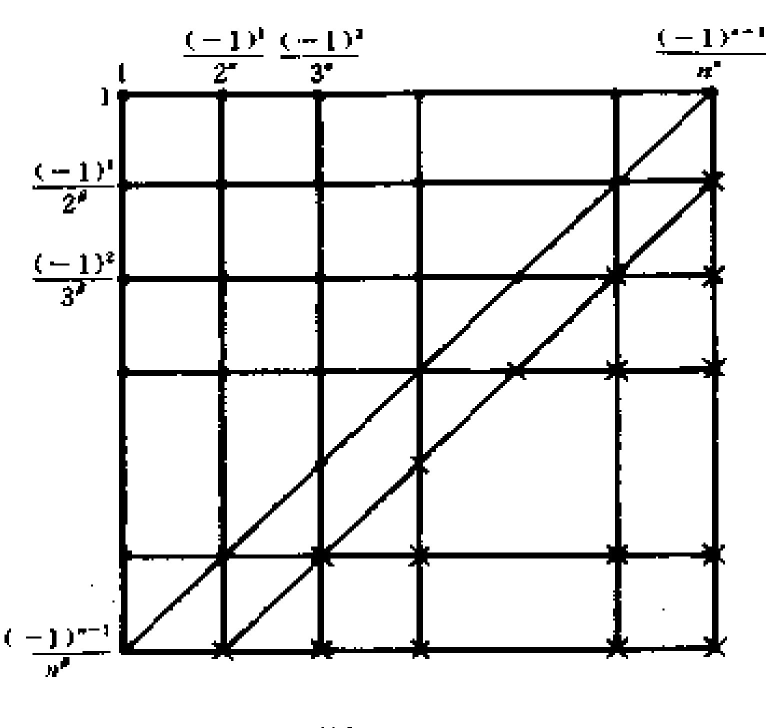



图 5.1

$$= d_{n+1}.$$

由前已证：当 $\alpha+\beta>1$ 时，$d_n\to0$（当 $n\to\infty$时），故有 $\Delta_n\to0$（当 $n\to\infty$时）. 于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(A_nB_n-\Delta_n)=\lim_{n\to\infty}A_n\cdot\lim_{n\to\infty}B_n$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha}\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta}\right),$$

其中右端两级数的收敛性是由 $\alpha>0,\beta>0$，按莱布尼兹判别法获得的。于是，当 $\alpha+\beta>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}(\alpha>0)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta}(\beta>0)$ 的积 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 为收敛级数。

2715. 验证下面二发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ 和 } 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的积是绝对收敛级数.

**证** 记 $1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\sum_{m=1}^{\infty}u_m$,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}v_m,$$

其中

$$u_1=1,u_2=-\frac{3}{2},u_3=-\left(\frac{3}{2}\right)^2,\cdots,u_m=-\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}\quad(m=2,3,\cdots),$$

$$v_1=1,v_2=2+\frac{1}{2^2},v_3=\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}\right),\cdots,v_m=\left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}\left(2^{m-1}+\frac{1}{2^m}\right)\quad(m=2,3,\cdots).$$

因此 $c_1=u_1v_1=1$. 一般地,在

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cdot\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$

中,按乘积定义有

$$\begin{aligned}c_n&=u_1v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}\\&\quad\cdot\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\cdots+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right]\\&\quad\cdot\left(2+\frac{1}{2^2}\right)+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}[(2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-\cdots\\&\quad-2-2^0)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{2}\right)]\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[\left(2^{n-1}-\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)+\left[\frac{1}{2^n}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right]\right]\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{3}{2^n}\\&=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛.

## § 4. 函数项级数

1° **收敛域** 使函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

收敛的 $x$ 值的总体 $X$ 叫做此级数的收敛域，而函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\qquad(x\in X)$$

称为级数的和.

2° 一致收敛性　对于函数叙列

$$f_1(x),f_2(x)\cdots,f_n(x),\cdots$$

如果：1) 存在有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\qquad(a<x<b);$$

2) 对于任何的数 $\varepsilon>0$ 可以确定 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $a<x<b$ 时，

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

成立，则称这函数叙列在区间 $(a,b)$ 内为一致收敛. 此种情形写：$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

若函数项级数(1) 的部分和叙列：

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)(n=1,2,\cdots)$$

在区间 $(a,b)$ 内一致收敛，则称(1) 在此已知区间内为一致收敛.

3° 哥西判别准则　级数(1) 在已知区间 $(a,b)$ 内一致收敛的充分而且必要的条件为：对于每一个 $\varepsilon>0$，有数 $N=N(\varepsilon)$ 存在，使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\varepsilon\quad(a<x<b)$$

成立.

4° 外耳什特拉斯判别法　对于级数(1)，若有收敛的数项级数

$$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots\qquad(2)$$

存在，使对于 $a<x<b$ 下列不等式都成立

$$|u_n(x)|\leqslant c_n(n=1,2,\cdots),$$

则级数(1) 在区间 $(a,b)$ 内绝对并一致收敛.

5° 亚伯耳判别法　如果：1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内一致收敛；2) 函数 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 全体是有界的并对每一个 $x$ 形成一单调的叙列，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{3}$$

于区间 $(a,b)$ 内一致收敛.

6° 迪里黑里判别法　如果 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的；2) 叙列 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 对于每一个 $x$ 都是单调的，并且当 $n\to\infty$ 时在 $(a,b)$ 内一致地趋于零，则级数(3) 在区间 $(a,b)$ 内一致收敛.

7° 函数项级数的性质　(a) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

(б) 若函数项级数(1) 在区间 $(a,b)$ 内一致收敛且有有穷的极限 $\lim\limits_{x\to a} u_n(x) = A_n(n=1,2,\cdots)$，则 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛，2) 下之等式成立：

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to a} u_n(x)\right].$$

(в) 若收敛级数(1) 的各项当 $a<x<b$ 时皆可微分并且导函数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 $(a,b)$ 内一致收敛，则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

(г) 若级数(1) 的各项连续，并且此级数在有穷区间 $(a,b)$ 内一致收敛，则

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \tag{4}$$

一般说来，若当 $n\to\infty$ 时 $\int_a^b R_n(x)dx \to 0$，则公式(4) 为真，这里 $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. 这个最后的条件对于积分的限是无穷大的时候也适合.

定出下列函数项级数的(绝对的和条件的)收敛域.

2716. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$.

**解** 令$\frac{1}{x}=y$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\sum_{n=1}^{\infty}ny^n.$$

显然上式右端级数的收敛半径为 1. 因此,仅当 $|y|=\left|\frac{1}{x}\right|<1$ 即 $|x|>1$ 时,原级数绝对收敛.

2717. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right|}=1,$$

故仅当$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$即$(1-x)^2<(1+x)^2$或$x>0$时,级数绝对收敛.

当$x=0$时,原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$,显见它为条件收敛. 当 $x<0$ 时,原级数通项不趋于零,故发散.

2718. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}}=1,$$

故仅当$\left|\frac{x}{2x+1}\right|<1$即$x^2<4x^2+4x+1$或

$$(3x+1)(x+1)>0 \tag{1}$$

时，级数绝对收敛，解不等式(1)，得

$$x>-\frac{1}{3}\text{ 或 }x<-1,$$

即为所求的绝对收敛域. 当$x=-\frac{1}{3}$或$x=-1$时，原级数通项不趋于零，故发散.

2719. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+1}=1,$$

故仅当$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|<1$时，级数绝对收敛. 解此不等式：

$$4x^2<1+2x^2+x^4,(x^2-1)^2>0,$$

即$|x|\neq 1$. 于是，当$|x|\neq 1$时，级数绝对收敛.

当$x=-1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，由2689题的结果知它是条件收敛的.

当$x=1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，仍由同题的结果知它是发散的.

2720. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}}{\frac{(n+1)3^{2n+2}}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3^2(n+1)}=\frac{2}{9},$$

故仅当 $|x(1-x)|<\frac{2}{9}$ 时，级数绝对收敛. 解此不等式：

$$-\frac{2}{9}<x(1-x)<\frac{2}{9}.$$

于是，$x$ 的值应为

$$x^2-x-\frac{2}{9}<0 \text{ 及 } x^2-x+\frac{2}{9}>0$$

的公共部分，也即

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{6} \text{ 及 } x>\frac{2}{3} \text{ 或 } x<\frac{1}{3}$$

的公共部分，合并得

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6}<x<\frac{1}{3} \text{ 及 } \frac{2}{3}<x<\frac{\sqrt{17}+3}{6},$$

此即级数的绝对收敛域.

当在此二区间的端点时，级数显然发散.

2721. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{2},$$

故仅当 $|\sin x|<\frac{1}{2}$ 时，级数绝对收敛. 解之，得

$$|x-k\pi|<\frac{\pi}{6}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当 $|x-k\pi|=\frac{\pi}{6}$ 时，由绝对值组成的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，它是收敛的.

因此，当 $|x-k\pi|\leqslant\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 时，级数绝对收敛.

2722. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

**解** 当 $p>1$ 及 $x\neq k(k=-1,-2,\cdots)$ 时，级数显然绝对收敛.

当 $0<p\leqslant1$ 及 $x\neq k(k=-1,-2,\cdots)$ 时，级数条件收敛.

当 $p\leqslant0$ 时，级数发散.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}(q>0;0<x<\pi)$.

**解** 由于

$$\frac{|\sin nx|}{2n^{q-p}}\leqslant\left|\frac{n^p\sin nx}{1+n^q}\right|\leqslant\frac{1}{n^{q-p}},$$

故当 $q-p>1$ 即 $q>p+1$ 时，级数绝对收敛；而当 $q\leqslant p+1$ 时，由绝对值组成的级数发散（理由可参看2698题的题解）.

当 $p<q\leqslant p+1$ 时，由于对 $0<x<\pi$ 内任一固定的 $x$，$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx$ 有界，且

$$\frac{n^p}{1+n^q}\sim\frac{1}{n^{q-p}}\longrightarrow0\quad(\text{当 } n\to\infty \text{ 时})$$

故级数收敛.

当 $q\leqslant p$ 时，级数显然发散.

总之，当 $q > p + 1$ 时，级数绝对收敛；而当 $p < q \leqslant p+1$时，级数条件收敛.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$（拉伯耳特级数）.

**解** 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \qquad (\text{A}) \qquad\qquad 与 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \qquad (\text{Б}).$$

当 $|x| < 1$ 时，级数(Б) 绝对收敛. 根据亚伯耳判别法，以单调递减且有下界的因子$\frac{1}{1-x^{2n}}$乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} \tag{B}$$

也收敛，且为绝对收敛.

同理，再以单调递减且有界的因子$x^n$乘级数(B)的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$$

仍然收敛，且为绝对收敛. 由于

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1-x^{2n}} + \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当 $|x| < 1$ 时绝对收敛.

当$|x|=1$ 时，级数(A)显然无意义.

当$|x|>1$ 时，级数(Б)显然发散. 下证级数(A)也发散. 若不然，当$|x|>1$ 时，由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛，再根据亚伯耳判别法，我们就会推出级数

当 $|x|>1$ 时，原级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{n}}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^{2n}}$.

由于 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$，再根据上面的讨论，故原级数绝对收敛.

总之，当 $|x|\neq 1$ 时，原级数绝对收敛.

2727. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{(1+x)(1+x^{2})\cdots(1+x^{n})}$.

**解** 记 $a_{n}=\dfrac{x^{n}}{(1+x)(1+x^{2})\cdots(1+x^{n})}$，则当 $|x|<1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_{n}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{|1+x^{n+1}|}=|x|<1,$$

故级数绝对收敛.

当 $|x|>1$ 时，级数可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^{2}}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{x^{n}}\right)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^{2}}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{x^{n}}\right)}, \tag{1}$$

其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 当 $|x|>1$ 即 $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ 时绝对收敛. 与 $|x|<1$ 的情况一样，得知级数(1)当 $|x|>1$ 时绝对收敛.

当 $x=-1$ 时，通项无意义. 但当 $x=1$ 时，原级数的通项 $a_{n}=\dfrac{1}{2^{n}}$，显然级数收敛.

总之，当 $x\neq -1$ 时，原级数绝对收敛.

2728. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}}=e^{-x},$$

故当 $x>0$ 时,$e^{-x}<1$,级数绝对收敛. 而当 $x=0$ 时,级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$,显然发散. 又当 $x<0$ 时,$e^{-x}>1$,级数发散.

2729. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

**解** 记 $a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$,则当 $x=0$ 时,

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}>\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\frac{1}{n},$$

故原级数发散. 当 $x\neq 0$ 时:

(1) 当 $|a|>1$ 时,有

$$0<a_n<\frac{1}{a^{2n}x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{|a|}\right)^{2n},$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{|a|}\right)^{2n}$ 的收敛性即知原级数绝对收敛.

(2) 当 $|a|\leqslant 1$ 时,有

$$|a_n|\geqslant\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{n},$$

故原级数发散.

2730. $\sum_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})(x>0)$.

**解** 记 $a_n=(2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$.

(1)当 $x=2$ 时,显然 $a_n=0(n=1,2,\cdots)$,故级数绝

对收敛.

(2) 当 $x\neq 2$ 时，注意 $x>0$，故有 $x^{\frac{1}{n}}\to 1$（当 $n\to\infty$）. 因此，当 $n$ 足够大时，$a_n$ 不变号，从而若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则必绝对收敛. 今用阿拉伯判别法，有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(x^{\frac{1}{n+1}}-1)}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2-x^{\frac{1}{n+1}}}\right)=\ln x,$$

故当 $\ln x>1$ 即 $x>e$ 时，原级数绝对收敛. 当 $x<e$ 时，原级数发散. 而当 $x=e$ 时，此时有（考虑当 $n$ 足够大时）

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{2-e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1-(e^{\frac{1}{n}}-1)}$$

$$=1+(e^{\frac{1}{n}}-1)+O((e^{\frac{1}{n}}-1)^2),$$

但 $e^{\frac{1}{n}}-1=\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$，故得

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

按高斯判别法，原级数发散.

总之，当 $x=2$ 及当 $x>e$ 时，原级数绝对收敛.

2731. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

**解** 对于任意的 $x$，只要 $n$ 足够大，该项就为正. 因此，它可以看成正项级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x,$$

故利用正项级数的判别法知：当 $x>1$ 时，级数收敛，且为绝对收敛；当 $x\leqslant 1$ 时，级数发散.

2732. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}(x>0,y>0)$.

**解** 若 $x<1$，将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n}.$$

由于

$$0<\frac{x^n}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^n}\leqslant x^n,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，故原级数绝对收敛.

同理，当 $y<1$ 时，原级数绝对收敛. 总之，当 $0<\min(x,y)<1$ 时，原级数绝对收敛.

2733. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}(y\geqslant 0)$.

**解** 记 $a_n=\frac{x^n}{n+y^n}(y\geqslant 0)$.

(1)当 $|x|<1$ 时，易见

$$|a_n|\leqslant |x|^n(n=1,2,\cdots).$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 的收敛性知原级数绝对收敛.

(2)当 $x=1$ 时，1°若 $y>1$，则由

$$|a_n|=\frac{1}{n+y^n}<\left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

易见原级数绝对收敛，2°若 $0\leqslant y\leqslant 1$，由于

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+y^n}\to 1 \text{（当 } n\to\infty \text{时）},$$
易见原级数发散.

（3）当 $x=-1$ 时，1°若 $y>1$，由
$$|a_n|=\frac{1}{n+y^n}<\left(\frac{1}{y}\right)^n (n=1,2,\cdots),$$
易见原级数绝对收敛. 2°若 $0\leqslant y\leqslant 1$，由
$$a_n=\frac{(-1)^n}{n+y^n}(n=1,2,\cdots),$$
易见原级数条件收敛.

（4）当 $|x|>1$ 时，1°若 $y=0$，则由
$$a_n=\frac{x^n}{n}(n=1,2,\cdots),$$
易见原级数发散. 2°若 $y>0$，则当 $\left|\frac{x}{y}\right|<1$ 即 $|x|<y$ 时，有
$$|a_n|=\frac{|x|^n}{a+y^n}<\left|\frac{x}{y}\right|^n,$$
故原级数绝对收敛. 当 $\left|\frac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 时，若 $y>1$，有
$$|a_n|=\left|\frac{x}{y}\right|^n\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{y^n}}\to+\infty \text{（当 } n\to\infty \text{时）};$$
若 $0<y\leqslant 1$，有
$$|a_n|>\frac{|x|^n}{n+1}\to+\infty \quad \text{（当 } n\to\infty \text{时）},$$
故当 $\left|\frac{x}{y}\right|\geqslant 1$ 时，原级数发散.

总之，当 $|x|<1, 0\leqslant y<+\infty$；当 $|x|=1, y>1$ 及当 $|x|>1, |x|<y$ 时，原级数绝对收敛. 当 $x=-1, 0\leqslant y$

$\leqslant 1$ 时，原级数条件收敛.

2734. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}$.

**解** 由于

$$a_n = \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}$$
$$= \sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2} + \left(\frac{|y|}{\max(|x|,|y|)}\right)^{n^2}} \cdot (\max(|x|,|y|))^n$$

及 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \max(|x|,|y|)$，故当 $\max(|x|,|y|)<1$ 时，级数绝对收敛；当 $\max(|x|,|y|)>1$ 时，级数发散；当 $\max(|x|,|y|)=1$ 时，由于 $a_n \to 1$（当 $n\to\infty$），故级数发散.

2735. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y}(x \geqslant 0)$.

**解** (1) 当 $0 \leqslant x < 1$ 时，此级数可与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$ 相比，它们具有相同的敛散性. 事实上

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} = 1,$$

且这两个级数均为正项级数. 对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}, \tag{1}$$

其通项 $\frac{x^n}{n^y} \leqslant n^{|y|}x^n = b_n (n=1,2,\cdots)$，但因

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n} = x < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且为绝对收敛. 因此，级数(1) 绝对

收敛，从而原级数也是绝对收敛的.

(2) 当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{n^y}$. 于是，当 $y>1$ 时收敛，且为绝对收敛；当 $y\leqslant 1$ 时发散.

(3)当 $x>1$ 时，原级数的通项可写成

$$\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}=\frac{\ln x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{n^y}$$

$$=\frac{\ln x}{n^{y-1}}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{n^y}.$$

由上式右端第一项所组成的级数当 $y-1>1$ 即 $y>2$ 时收敛，而当 $y\leqslant 2$ 时发散. 由上式右端第二项所组成的级数，利用 $0<\frac{1}{x}<1$ 及最初讨论的结果，得知它对任意的 $y$ 值均收敛. 因此，原级数当 $x>1$，$y>2$ 时收敛，且为绝对收敛.

总之，当 $0\leqslant x<1$，$-\infty<y<+\infty$；当 $x=1$，$y>1$ 及当 $x>1$，$y>2$ 时，原级数绝对收敛.

2736. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\right|}=|\operatorname{tg}x|,$$

故当 $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$(其中 $k$ 为整数)时，$|\operatorname{tg}x|<1$，从而级数绝对收敛. 而当 $|x-k\pi|\geqslant\frac{\pi}{4}$ 时，由于 $\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)\to\infty$，故级数发散.

2737. 证明：若劳郎级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_1$ 和 $x = x_2$（$|x_1| < |x_2|$）时收敛，则此级数当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时也收敛.

**证** 由于劳郎级数当 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 时收敛，故级数

$$(1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n, \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n},$$

$$(3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n \qquad (4)\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$$

均收敛. 于是，由(3)知，当 $|x| < |x_2|$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛. 由(2)知，当 $\left|\frac{1}{x}\right| < \left|\frac{1}{x_1}\right|$ 即当 $|x_1| < |x|$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛. 因而，当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 均收敛，也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

2738. 求劳郎级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

的收敛域并求它的和.

**解** 考虑级数

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n, \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} x^{-n}.$$

显然仅当 $|x| < 2$ 时，级数(1)收敛；仅当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时，级数(2)收敛. 因此，当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时，原级数收敛.

当$\frac{1}{2}<|x|<2$时，记级数(1)的和为$S_+(x)$，级数(2)的和为$S_-(x)$. 显然有

$$S_-(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n=-S_+\left(\frac{1}{x}\right).$$

今求$S_+(x)$. 注意当$\frac{1}{2}<|x|<2$时，下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}x^n,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$$

均收敛，且有

$$\begin{aligned}
S_+(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2^n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n\\
&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{2^{m+1}}x^{m+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\\
&=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\
&=\frac{x}{2}S_+(x)+\frac{x}{2-x},
\end{aligned}$$

得

$$S_+(x)=\frac{\frac{x}{2-x}}{1-\frac{x}{2}}=\frac{2x}{(2-x)^2}.$$

从而

$$S_-(x)=-\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\left(2-\frac{1}{x}\right)^2}=-\frac{2x}{(2x-1)^2},$$

故当$\frac{1}{2}<|x|<2$时，有

记 $a_n = \dfrac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$. 显然,当 $x$ 为任意数,$y = 0,1,2,\cdots$ 时,$a_n = 0(n = 1,2,\cdots)$. 于是,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 研究一下 $y \neq k(k = 0,1,2,\cdots)$ 的情形,有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{n+1}{n+1+t} \cdot \frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= -\frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{ex}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(1)当 $|x|<1$ 时,由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{n+1}{n-y}\right| \cdot \frac{1}{e|x|}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{|x|} > 1,$$

故此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(2) 当 $|x| > 1$ 且 $n$ 充分大时,有 $|a_n| < |a_{n+1}|$,故 $a_n \nrightarrow 0$,从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(3)当 $|x| = 1$(考虑 $n$ 足够大)时,有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1+y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1+\frac{1+\left(y-\frac{1}{2}\right)}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是,1° 当 $y > \frac{1}{2}$ 时,由高斯判别法知,此时级数绝对收敛. 2° 当 $y \leqslant \frac{1}{2}$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 但当 $|y| < \frac{1}{2}$ 时,

有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\frac{1}{x}\left[1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

其中 $0<\mu<1$. 显然，当 $x=-1$ 时，$a_n$ 不变号，因此可看成正项级数，且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数，且当 $n$ 足够大时，

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\mu}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)>1,$$

也即 $|a_n|$ 单调下降. 此外，还有

$$|a_n|=|y|=(1-y)(2-y)\cdots(n-1-y)\frac{e}{n^n}$$

$$=e|y|\frac{1-y}{n}\frac{2-y}{n}\cdots\frac{n-1-y}{n}\frac{1}{n}<\frac{e|y|}{n}\to 0$$

(当 $n\to\infty$).

由莱布尼兹判别法，便知当 $x=1$，$|y|<\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

总之，当：(1) $|x|<1$，$y$ 为任意数；(2) $|x|=1$，$y>\frac{1}{2}$；(3) $x$ 为任意数，$y=0,1,2,\cdots$ 时，原级数绝对收敛. 当 $x=1$，$|y|<\frac{1}{2}$ 时，原级数条件收敛.

**2740.** 证明：若迪里黑里级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x=x_0$ 收敛，则此级数当 $x>x_0$ 时也收敛.

**证** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛，并且 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 当 $x>x_0$ 时单调下降趋于零，故根据亚伯耳判别法即知：当 $x>x_0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

**2741.** 证明：叙列 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $(a,b)$ 内一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分而且必要的条件是

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0,$$

式中 $$\gamma_n(x)=|f(x)-f_n(x)|.$$

**证** 先证必要性.

由于 $f_n(x)$ 在 $(a,b)$ 内一致收敛于 $f(x)$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N(\varepsilon)>0$，，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，对于区间 $(a,b)$ 内的一切 $x$ 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有

$$\sup_{a<x<b}\{\gamma_n(x)\}\leqslant\varepsilon,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0.$$

再证充分性.

由于 $\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有

$$\sup_{a<x<b}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

于是，对于 $(a,b)$ 内的一切 $x$ 值，只要当 $n>N(\varepsilon)$ 时，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(a,b)$内一致收敛于$f(x)$.

2742. 叙列$f_n(x)(n=1,2\cdots)$. (a)在区间$(x_0,+\infty)$上收敛；(б)在每一个有穷的区间$(a,b)\subset(x_0,+\infty)$上一致收敛；(в)在区间$(x_0,+\infty)$上一致收敛是什么意思？

**解** (a)对于任意的$\varepsilon>0$及任意的$x_0<x<+\infty$，都存在一个正整数$N=N(\varepsilon,x)$，使得当$n>N$时，恒有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称叙列$f_n(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上收敛. 要注意的是，$N$不仅与$\varepsilon$有关，而且与值$x$有关.

(б)对每一个$(a,b)\subset(x_0,+\infty)$，如果对于任给的$\varepsilon>0$，存在一个$N=N(\varepsilon,a,b)$，使当$n>N$时，对于$(a,b)$内的一切$x$值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

则称$f_n(x)$在$(a,b)$上一致收敛.

(в)如果对于任给的$\varepsilon>0$，都有正整数$N=N(\varepsilon)$存在($N(\varepsilon)$仅与$\varepsilon$有关)，使当$n>N$时，对所有的$x_0<x<+\infty$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称$f_n(x)$在$(x_0,+\infty)$上一致收敛.

2743. 对于叙列

$$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)\quad(0<x<1)$$

求出其项的最小号码$N=N(\varepsilon,x)$，使从这项起叙列的项在已知点$x$与极限函数的差不超过0.001，设$x=\frac{1}{10},\frac{1}{\sqrt{10}},\cdots,\frac{1}{\sqrt[m]{10}},\cdots$.

此叙列在已知区间$(0,1)$内是否一致收敛？

**解** 显见极限函数为零. 于是考虑

$$|x^n-0|<\varepsilon,$$

其中 $\varepsilon=0.001$. 当 $0<x<1$ 时，上式即 $x^n<\varepsilon$ 或 $n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}$，故最小号码为 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\right]$.

当 $x=\frac{1}{10}$时，$N=3$；

当 $x=\frac{1}{\sqrt{10}}$时，$N=6$；

……

当 $x=\frac{1}{\sqrt[m]{10}}$时，$N=3m$，

……

下面研究此叙列在(0,1)内的一致收敛性. 由于当 $x$ 趋于 1 时，$\lg x$ 趋于零，故

$$\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}\longrightarrow+\infty\quad(0<\varepsilon<1, x\to1-0),$$

即$\frac{\lg\varepsilon}{\lg x}$无限增加. 因此，不可能找到一个公共的 $N$(它仅与 $\varepsilon$ 有关)值，使当 $n>N$ 时，对于(0,1)内的一切 $x$ 值，皆有 $x^n<\varepsilon$. 因此，叙列

$$f_n(x)=x^n(n=1,2,\cdots)\quad(0<x<1)$$

在区间(0,1)内不一致收敛.

2744. 应当取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

的若干项方可使部分和 $S_n(x)$当$-\infty<x<+\infty$时与级数的和之差小于 $\varepsilon$? 设：

(a)$\varepsilon=0.1$；　　(6)$\varepsilon=0.01$；

(в)$\epsilon=0.001$.

求出 $n$ 的数值来.

**解** 易证此级数收敛，记其和为

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

如果取 $n$ 项，其部分和为 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k(k+1)}$. 欲使其误差 $\Delta_n(x)=|S(x)-S_n(x)|$ 小于 $\epsilon$，问项数 $n$ 为若干？可用下列估计法：

$$\begin{aligned}\Delta_n(x)&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\\&=\left|\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{\sin kx}{k(k+1)}\right|\\&\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{|\sin kx|}{k(k+1)}\\&\leqslant\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n+1}^{N}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{N+1}\right)=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

若令 $\frac{1}{n+1}<\epsilon$，也即当 $n>\frac{1}{\epsilon}-1$ 时就有 $\Delta_n(x)<\epsilon$.

记 $N_0=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$，则当 $n>\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+\left\{\frac{1}{\epsilon}\right\}-1=N_0-(1-\left\{\frac{1}{\epsilon}\right\})$ 时，即有 $\Delta_n(x)<\epsilon$，其中 $\left\{\frac{1}{\epsilon}\right\}$ 表示 $\frac{1}{\epsilon}$ 的零头部分.

也即可取

$$n=N_0,N_0+1,N_0+2,\cdots$$

均有 $\Delta_n(x)<\varepsilon$. 所取的项数 $N_0$ 与 $\varepsilon$ 的关系，按题设数值，可有

| $\varepsilon$ | (а)0.1 | (б)0.01 | (в)0.001 |
|---|---|---|---|
| $N_0$ | 10 | 100 | 1000 |

2745[+]. 对怎样的 $n$，不等式

$$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001 \quad (0\leqslant x\leqslant 10)$$

能保证成立？

**解** 由台劳公式，有

$$\Delta_n(x)=\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|$$

$$=\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$

$$\leqslant\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$. 欲 $\Delta_n(x)<0.001$，只要

$$\frac{e^{10}}{(n+1)!}10^{n+1}<\frac{1}{1000}.$$

也即要求 $n$，使

$$e^{10}10^{n+4}<(n+1)!.$$

为此，两边取对数，有

$$10+(n+4)\ln 10<\sum_{k=2}^{n+1}\ln k=p_n. \qquad (1)$$

注意到

$$p_n>\int_1^{n+1}\ln t\,dt=(n+1)\ln(n+1)-n.$$

若能有

$$(n+1)\ln(n+1)>n(1+\ln 10)+10+4\ln 10,(2)$$

就可保证(1)式成立，从而$\Delta_n(x)<0.001$. 为解(2)中的$n$，可用估算法，例如当$n=39$时，(2)式就成立，故对于$n$取39，即取39项时就能保证$\left|e^x-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right|<0.001(0\leqslant x\leqslant 10)$.

研究叙列在所示区间上的一致收敛性：

**2746.** $f_n(x)=x^n$； (a)$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$； (б)$0\leqslant x\leqslant 1$.

**解** (a)当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

任给$\varepsilon>0$，由于

$$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，即只要

$$n>\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}.$$

取$N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$，则当$n>N$时，对于$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上的一切$x$值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)=x^n$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上一致收敛于零.

$$(б)f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 若\ x=1,\\ 0, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 $n$ 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

**2747.** $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$；$0\leqslant x\leqslant 1$.

**解** 当 $x=0$ 或 1 时，$f_n(x)=0$；当 $0<x<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. 因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=x^n-x^{n+1}=g(x).$$

由于 $g'(x)=x^{n-1}[n-(n+1)x]$，故若令 $g'(x)=0$，即求得 $x=\frac{n}{n+1}$. 显然，当 $0<x<\frac{n}{n+1}$ 时，$g'(x)>0$；当 $\frac{n}{n+1}<x<1$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $x=\frac{n}{n+1}$ 达到 $[0,1]$ 上的最大值. 于是，对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，有

$$g(x)\leqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+1}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n+1}<\varepsilon$，即只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[0,1]$ 上的一切 $x$ 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零.

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{nx}{1+n+x}-x\right|$$

$$=\frac{x+x^2}{1+n+x}<\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于$[0,1]$上的一切 $x$ 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-x|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛于 $x$.

2751. $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$；(a)$0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$；(б)$1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1+\varepsilon$；(в)$1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$，其中 $\varepsilon>0$.

**解** (a)当 $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$ 时

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^n}{1+x^n}<(1-\varepsilon)^n.$$

任给 $\varepsilon'>0$，要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'$，只要$(1-\varepsilon)^n<\varepsilon'$，即只要 $n>\frac{\lg\varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)}$. 取 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon'}{\lg(1-\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于$[0,1-\varepsilon]$上的一切 $x$ 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1-\varepsilon]$上一致收敛于零.

$$(б)f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0,\text{若 } 1-\varepsilon\leqslant x<1;\\ \frac{1}{2},\text{若 } x=1,\\ 1,\text{若 } 1<x\leqslant 1+\varepsilon.\end{cases}$$

取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{3}$，不论 $n$ 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{3}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$上收敛而不一致收敛.

(в)当 $1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$时

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=1=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{1+x^n}<\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}.$$

任给 $\varepsilon'>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon'$，只要$\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}<\varepsilon'$，即只要$n>\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}$. 取 $N=\left[\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $x\geqslant 1+\varepsilon$ 的一切 $x$ 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-1|<\varepsilon'.$$

因此，$f_n(x)$在$[1,+\infty)$上一致收敛于 1.

**2752.** $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$；(a)$0\leqslant x\leqslant 1$；(б)$1<x<+\infty$.

**解** (a)当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 $n$ 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

(б)当 $1<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{2nx}{1+n^2x^2}<\frac{2nx}{n^2x^2}<\frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只要 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,对于 $x>1$ 的一切 $x$ 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

因此,$f_n(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上一致收敛.

2753. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

**解** 当 $-\infty<x<+\infty$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=|x|=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{x^2+\frac{1}{n^2}-x^2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}+|x|}<\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,对于一切实数 $x$,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

因此,$f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

2754. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$; $0<x<+\infty$.

**解** 当 $0<x<+\infty$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left[\left(x+\frac{1}{n}\right)-x\right]}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=f(x).$$

若取 $x=\frac{1}{n}$,则有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|n\left[\sqrt{\frac{2}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}}\right]-\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}}\right|$$

$$=\sqrt{n}\left|\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{n}\frac{\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}+1)}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2}+1)^2}>\frac{1}{18}\sqrt{n}.$$

当 $n$ 充分大时,它就可以大于指定的 $\varepsilon_0>0$. 因此,$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2755. (a)$f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$; $-\infty<x<+\infty$;

(б)$f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$; $-\infty<x<+\infty$.

**解** (a)当$-\infty<x<+\infty$时,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{|\sin nx|}{n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$,要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,对于一切实数 $x$,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(б)当$-\infty<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

取$\varepsilon_0$使$0<\varepsilon_0<1$，不论$n$多么大，只要取$x=\frac{n\pi}{2}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right)-f\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2756. (a)$f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$；$0<x<+\infty$；(б)$f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx$；$0<x<+\infty$.

**解** (a)当$0<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg} nx=\frac{\pi}{2}=f(x).$$

取$\varepsilon_0$使$0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{2}$，不论$n$多么大，只要取$x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\operatorname{arc\,tg}1-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

(б)当$0<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{\pi}{2}x=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=x\left|\operatorname{arc\,tg} nx-\frac{\pi}{2}\right|=x\left|-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{nx}\right|\leqslant x\cdot\frac{1}{nx}=\frac{1}{n}.$$

任给$\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $x>0$ 的一切 $x$ 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上一致收敛.

2757. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$；$0<x<1$.

**解** 当 $0<x<1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x).$$

取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<e^{-1}$，不论 $n$ 多么大，只要取 $x=1-\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|=e^{n(1-\frac{1}{n}-1)}=e^{-1}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,1)$上收敛而不一致收敛.

2758. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$；(a)$-l<x<l$，其中 $l$ 为任意的正数；(6)$-\infty<x<+\infty$.

**解** (a)当$-l<x<l$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=0=f(x),$$

并有(当 $n>[l]$时)

$$|f_n(x)-f(x)|=e^{-(x-n)^2}\leqslant e^{-(n-l)^2}.$$

任给 $\varepsilon>0$，(可设 $\varepsilon<1$)，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>[l]$且 $e^{-(n-l)^2}<\varepsilon$，即只要 $n>l+\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

取 $N=\left[l+\ln\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于$(-l,l)$上的一切 $x$ 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(-l,l)$上一致收敛.

(6)当$-\infty<x<+\infty$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

取$\varepsilon_0$使$0<\varepsilon_0<1$，不论$n$多么大，只要取$x=n$，就有

$$|f_n(n)-f(n)|=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2759. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$；$0<x<1$.

**解** 当$0<x<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$. 又$\lim\limits_{t\to+0} t\ln t=0$，故

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|.$$

任给$\varepsilon>0$. 由于$\lim\limits_{t\to+0} t\ln t=0$，故存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，

使当$0<t<\delta$时，恒有$|t\ln t|<\varepsilon$. 取$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]$，

则当$n>N$时，$\frac{1}{n}<\delta$，从而对一切$0<x<1$，都

有$0<\frac{x}{n}<\delta$，故

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,1)$上一致收敛.

2760. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$；(a)在有穷的区间$(a,b)$上；

(6)在区间$(-\infty,+\infty)$上.

**解** (a)当$a<x<b$时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}\right\}^x=e^x=f(x).$$

记 $C=\max\{|a|,|b|\}$. 由台劳公式知

$$\ln f_n(x)=n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$=n\left[\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\theta x}{n}\right)^3}\cdot\frac{x^3}{n^3}\right],$$

其中 $0<\theta<1$, $\left|\frac{\theta x}{n}\right|\leqslant\frac{c}{n}$, $|x^3|\leqslant c^3$, 故

$$\ln f_n(x)=x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是易知

$$f_n(x)=e^{x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}=e^x\left[1-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

取适当大的 $N_1$, 则当 $n>N_1$ 时, 就有

$$|f_n(x)-f(x)|=e^x\left|-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{c^2e^c}{n}\quad(a<x<b)$$

任给 $\varepsilon>0$, 要使 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 只要 $n>N_1$, 且 $n>\frac{c^2e^c}{\varepsilon}$. 取 $N=\max\left(N_1,\left[\frac{c^2e^c}{\varepsilon}\right]\right)$, 则当 $n>N$ 时, 对于 $(a,b)$ 上的一切 $x$ 值, 均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(a,b)$ 上一致收敛.

(6) $|f_n(x)-f(x)|=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|.$

不论 $n$ 多么大, 只要取 $x=n$, 就有

$$|f_n(n)-f(n)|=2^n\left[\left(\frac{e}{2}\right)^n-1\right],$$

它趋于 $+\infty$, 不可能小于任给的 $\varepsilon>0$. 因此, $f_n(x)$ 在

$(-\infty,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

2761. $f_n(x)=n(x^{\frac{1}{n}}-1)$; $1\leqslant x\leqslant a$.

**解** 当 $1\leqslant x\leqslant a$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln x=f(x),$$

并有

$$|f_n(x)-f(x)|=|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n\ln[1+(x^{\frac{1}{n}}-1)]|$$

$$=\left|n(x^{\frac{1}{n}}-1)-n(x^{\frac{1}{n}}-1)+\frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)^2\right.$$

$$\left.+nO((x^{\frac{1}{n}}-1)^3)\right|$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)^2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)<\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2},$$

其中$A>0$为常数,上述不等式可在适当大的$N_1$取定后当 $n>N_1$ 时成立. 显然对任给的 $\varepsilon>0$,存在$N_2$,使当 $n>N_2$ 时,$\frac{(\ln a)^2}{n}+A\cdot\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,于是,取 $N=\max(N_1,N_2)$,则当 $n>N$ 时,对于$[1,a]$上的一切 $x$ 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$在$[1,a]$上一致收敛.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$; $0\leqslant x\leqslant 2$.

**解** $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant 1\\ x, 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(1)当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt[n]{1+x^n}-1\right|$$

$<\frac{2}{N}\leqslant x$. 于是，$f_n(x)=0$. 因此，

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0=f(x).$$

取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<1$，不论 $n$ 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n^2}$，

就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n^2}\right)-f\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

**2764.** 设 $f(x)$ 为定义于区间 $(a,b)$ 内的任意函数，且

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明，当 $n\to\infty$ 时，

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (a<x<b).$$

**证** 由于

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}\,|[nf(x)]-nf(x)|\leqslant\frac{1}{n},$$

故对任给的 $\varepsilon>0$，若取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，

对于一切 $x\in(a,b)$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $(a,b)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

**2765.** 设函数 $f(x)$ 于区间 $(a,b)$ 内有连续的导函数 $f'(x)$，且

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

证明：在闭区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上（其中 $a<\alpha<\beta<b$），

$$f_n(x)\rightrightarrows f'(x).$$

**证** 考虑$[\alpha',\beta']$，其中$a<\alpha'<\alpha<\beta<\beta'<b$. 由于$f_n(x)$($n$充分大)在$[\alpha',\beta']$上有连续的导函数，故由微分学中值公式，得

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=nf'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\ (0<\theta<1).$$

又因$f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上连续，所以$f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上一致连续，即对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于$[\alpha',\beta']$上的任意点$x'$及$x''$，只要当$|x'-x''|<\delta$时，就有$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$. 今取$N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1=N(\varepsilon)$，

则当$n>N$时，有$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$.

于是，对$[\alpha,\beta]$上的一切$x$值，只要$N$足够大，就可保证$x$与$x+\frac{\theta}{n}$均属于$[\alpha',\beta']$. 于是，对于$[\alpha,\beta]$上的一切值$x$，均有

$$|f_n(x)-f'(x)|=|f'(x+\frac{\theta}{n})-f'(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛于$f(x)$.

**2766.** 设$f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$，其中$f(x)$为连续函数. 证明叙列$f_n(x)$在任何有穷闭区间$[a,b]$上一致收敛.

**证** 记$f_n(x)$的极限函数为$F(x)$，则

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t)dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right)$$

$$(0 < \theta_i < 1; i = 0, 1, \cdots, n-1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上连续，故它在 $[a, b+1]$ 上一致连续，即对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使对于 $[a, b+1]$ 上的任意点 $x'$ 及 $x''$，只要当 $|x' - x''| < \delta$ 时，就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$。今取 $N = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$，则当 $n > N$，$a \leqslant x \leqslant b$ 时，有 $\left|\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) - \left(x + \frac{i}{n}\right)\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$ 且 $x + \frac{i}{n} \in [a, b+1]$，$x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n} \in [a, b+1]$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$.

于是

$|F(x) - f_n(x)|$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left| f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) - f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right|$$

$$< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \varepsilon = \frac{1}{n} \cdot n\varepsilon = \varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性：

**2767.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$；(a) 在区间 $|x| < q$ 内，此处 $q < 1$，(σ) 在区间 $|x| < 1$ 内.

**解** (a) 由于 $|x^n| < q^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛 $(0 < q < 1)$，故由

外耳什特拉斯判别法知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x|<q<1$ 内绝对并一致收敛.

$$(6)S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$ 当 $|x|<1$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x}.$$

取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 $n$ 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt[n+1]{2}}\right|>\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 在 $|x|<1$ 内收敛而不一致收敛.

**2768.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$；在闭区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上.

**解** 由于 $\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1,1]$ 上绝对并一致收敛.

**2769.** $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$；在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上.

**解** $$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k$$

$$=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1}.$$

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1,\text{若 } 0\leqslant x<1;\\0,\text{若 } x=1.\end{cases}$$

取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 $n$ 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛而不一致收敛.

**2770.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$； $-1\leqslant x\leqslant 1$.

**解** $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)=x-\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=x,$$

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

于是对任给的 $\varepsilon>0$，若取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于 $[-1,1]$ 上的一切 $x$ 值，均有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛.

**2771.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$； $0<x<+\infty$.

**解** $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{nx+1}.$$

当 $0<x<+\infty$ 时，有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=1.$$

取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 $n$ 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2772. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$；$0<x<+\infty$.

**解** 由于 $\left|\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\right|<\frac{1}{n^2}(x>0)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，原级数在 $(0,+\infty)$ 上绝对并一致收敛.

2773. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$；

(a) $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$；(б) $\varepsilon\leqslant x\leqslant+\infty$.

**解** 当 $x=0$ 时，显然级数收敛于零.

当 $x>0$ 时，令

$$u_n(x)=\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1+(n+1)x}\right)=0<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛 $(x\geqslant 0)$. 易见，此时

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+x)\cdots(1+(k-1)x)}-\frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\to 1$$

(当 $n\to\infty$)，

因此有

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)\begin{cases}0, & 若\ x=0;\\ 1, & 若\ x>0.\end{cases}$$

(a)当 $x>0$ 时，有

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

取 $0<\varepsilon_0<1$. 对于任意大(但固定的)$n$，由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}=1,$$

故可取 $0<x_0<\varepsilon$，使

$$\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)}>\varepsilon_0,$$

即

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|>\varepsilon_0.$$

由此可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$ 上不一致收敛.

(6)当 $x\geqslant\varepsilon$ 及 $n\geqslant 3$ 时，由于

$$|u_n(x)|=\left|\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}\right|$$

$$< \frac{nx}{(1+x)^n}$$

$$= \frac{nx}{1+nx+\frac{1}{2!}n(n-1)x^2+\cdots+x^n}$$

$$< \frac{nx}{\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3}$$

$$= \frac{6}{(n-1)(n-2)x^2} < \frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2},$$

且级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{6}{(n-2)^2\varepsilon^2}$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，原级数在 $[\varepsilon, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

**2774.** 利用外耳什特拉斯判别法，证明下列函数项级数在所指区间内的一致收敛性：

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty < x < +\infty$;

(б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $-2 < x < +\infty$;

(в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant +\infty$;

(г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $|x| < +\infty$;

(д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2$;

(е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $|x| < a$, $a$ 为任意正数；

(ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $|x| < +\infty$;

(з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $|x|<+\infty$;

(и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x|<+\infty$;

(к) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|<a$;

(л) $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $0\leqslant x<+\infty$;

(м) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $|x|<+\infty$.

**解** (а)由于$\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(б)考虑$n\geqslant 2$,有$\left|\frac{(-1)^n}{x+2^n}\right|<\frac{1}{2^n-2}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$ $(x>-2)$.但$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$在$(-2,+\infty)$上一致收敛.

(в)当$x=0$时,级数显然收敛于零.当$x>0$时,$1+n^4x^2\geqslant 2n^2x$,于是$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^2}$.又因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$[0,+\infty)$上一致收敛.

(г)当$|x|<+\infty$时,$1+n^5x^2\geqslant 2n^{\frac{5}{2}}x$,于是,$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.又因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}$

一致收敛. 从而,原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{[\frac{n}{2}]!}$当$|x|<a$时一致收敛.

(ж) 当$|x|<+\infty$时,$\left|\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$,且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

(з) 当$|x|<+\infty$时,$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$,且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

(и) 当$|x|<+\infty$时,$\left|\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}\right|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$当$|x|<+\infty$时一致收敛.

(к) 当$n$充分大(即$n\geqslant n_0$)时,对于$|x|<a$,有

$$\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)=\frac{x}{n\ln^2 n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但当$|x|<a$时,$\left|\frac{x}{n\ln^2 n}\right|\leqslant\frac{a}{n\ln^2 n}$,而$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{a}{n\ln^2 n}$收敛*)以及$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$也收敛,故级数$\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1+\frac{x}{n\ln^2 n})$当$|x|<a$时,一致收敛.

*)利用 2619 题的结果.

(л)当$x>0$时,$e^{nx}>1+nx+\frac{n^2x^2}{2}>\frac{n^2x^2}{2}$,故$e^{-nx}<\frac{2}{n^2x^2}$. 于是,$|x^2e^{-nx}|<\frac{2}{n^2}$,此式对$x=0$也成

立. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 当 $0\leqslant x<+\infty$ 时一致收敛.

(м)由于 $x^2+n^3\geqslant 2n^{\frac{3}{2}}|x|$，故 $\left|\frac{x}{x^2+n^3}\right|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

当 n 充分大($n\geqslant n_0$)时，对于 $|x|<+\infty$，有

$$\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{x^2+n^3}\right|=\left|\frac{2x}{x^2+n^3}+O\left(\left(\frac{2x}{x^2+n^3}\right)^2\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

又因 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 均收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x^2+n^3}$ 当 $|x|<+\infty$ 时一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性：

**2775.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$；(a)在闭区间 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 上，其中 $\varepsilon>0$；(б)在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上.

**解** (a)当 $\varepsilon\leqslant x\leqslant 2\pi-\varepsilon$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

又 $\frac{1}{n}$ 趋于零并且不依赖于 $x$，故由迪里黑里判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$上一致收敛.

(б)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[0, 2\pi]$上条件收敛*). 但它不一致收敛，这可用反证法获证。设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[0, 2\pi]$上

一致收敛，其中 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{n}(n=1,2,\cdots)$，

则应有：任给 $\varepsilon>0$，例如取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$，必存在 $N_1=N_1(\varepsilon)$（它与 $x$ 无关），使当 $n\geqslant N_1$ 时，对于 $[0,2\pi]$ 上的一切 $x$ 值，均有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 $p$ 为任意自然数. 取 $N_2\geqslant 2N_1$，记 $n_0=\max\left(\left[\frac{N_2}{2}\right],\left[\frac{N_2+1}{2}\right]\right)$，则 $n_0\geqslant N_1$，又取 $p$ 使 $n_0+p=N_2+1$，则应有

$$\left|u_{n_0+1}(x)+u_{n_0+2}(x)+\cdots+u_{n_0+p}(x)\right|<\varepsilon,$$

也即有

$$\left|\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}u_n(x)\right|<\varepsilon=\frac{1}{4}(x\in[0,2\pi]).\qquad(1)$$

今取 $x_0=\frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{\pi}{2}$，当然上式（1）也应成立.

但是另一方面，由于当 $\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2$ 时，显然有 $0<nx_0<\frac{\pi}{2}$，故有 $\sin nx_0\geqslant nx_0\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{n}{N_2+2}$.

于是，$u_n(x_0)=\frac{\sin nx_0}{n}\geqslant\frac{1}{N_2+2}$，从而有

$$\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}u_n(x_0)\geqslant\frac{1}{N_2+2}\sum_{\frac{N_2}{2}+1\leqslant n<N_2+2}1$$

$$\geqslant\frac{1}{N_2+2}\cdot\frac{1}{2}(N_2+2)=\frac{1}{2},$$

它与（1）中当 $x=x_0$ 时相矛盾. 这就证明了级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在$[0,2\pi]$上条件收敛而不一致收敛的结论.

*)利用 2698 题的结果.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$; $0<x<+\infty$.

**解** 记 $u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^n x}(n=1,2\cdots)$，当 $0<x<+\infty$ 时，由于

$$|u_n(x)|\leqslant 2^n\cdot\frac{1}{3^n x}=\frac{1}{x}(\frac{2}{3})^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，故原级数绝对收敛，从而收敛.

但它在$(0,+\infty)$内并不一致收敛. 如若不然，即设它一致收敛，则对任给 $\varepsilon>0$，例如取 $\varepsilon=1$，必存在 $N=N(\varepsilon)$ (它与 $x$ 无关)，使当 $n\geqslant N$ 时，对于$(0,+\infty)$内的一切 $x$ 值，均有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 $p$ 为任意自然数. 今取 $p=1,n=N$，则对于一切 $x\in(0,+\infty)$，应有

$$|u_{N+1}(x)|<\varepsilon=1.$$

又取 $x_0=\frac{2}{3^{N+1}\pi}\in(0,+\infty)$，则也应有 $|u_{N+1}(x_0)|<1$. 但事实上却有

$$u_{N+1}(x_0)=2^{N+1}\sin\frac{1}{3^{N+1}x_0}=2^{N+1}\sin\frac{\pi}{2}$$
$$=2^{N+1}>1,$$

这与 $|u_{N+1}(x_0)|<1$ 矛盾. 证毕.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

解 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$. 当 $0<x<+\infty$ 时，$\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}$，它单调一致地趋于零. 因此，由迪里黑里判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 当 $0<x<+\infty$ 时一致收敛.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$；$0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，显然 $\frac{1}{n+\sin x}$ 对于 $n$ 单调递减，同时由于 $0<\frac{1}{n+\sin x}<\frac{1}{n-1}$，故当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上一致地趋于零. 又由于 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$，故原级数在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$；$|x|\leqslant 10$.

解 $\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\right|\leqslant 2$，记 $b_n(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$，由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}>\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}},$$

故 $b_n(x)$ 单调下降. 又由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\to 0\quad(|x|\leqslant 10),$$

故 $b_n(x)$ 单调一致地趋于零. 因此，由迪里黑里判别法知，级数在 $[-10,10]$ 上一致收敛.

2780. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$；$-\infty < x < +\infty$.

**解** $\left|\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2n\pi}{3}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{\pi}{3}\right|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. 又 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ 对于每一个 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是单调递减的，且由于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leqslant \frac{1}{n}$，故对每一个 $x$ 一致地趋于零. 因此，由迪里黑里判别法知，级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

2781. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$；$0 \leqslant x < +\infty$.

**解** 当 $x = 2m\pi (m = 0, 1, 2 \cdots)$ 时，

$$\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx = 0.$$

当 $x \neq 2m\pi (m = 0, 1, 2, \cdots)$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| = |\sin x| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right|$$

$$\leqslant |\sin x| \cdot \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$

$$= 2\left|\cos \frac{x}{2}\right| \leqslant 2$$

于是，对于一切 $x \in [0, +\infty]$，均有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin x \sin kx\right| \leqslant 2.$$

又 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 对于每一个 $x \in [0, +\infty)$ 关于 $n$ 都是单调递减的，且由 $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ 知，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 $x$

在 $0\leqslant x<+\infty$ 上一致地趋于零. 因此,由迪里黑里判别法知,级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

2782. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0\leqslant x<+\infty$.

**解** $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$. 由于

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛*),且与 $x$ 无关,故它对 $x$ 而言是一致收敛的.

另一方面,$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$ 对于每一个 $x\in[0,+\infty)$ 都是单调递增的且有界:$\left|\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}\right|\leqslant 1$.

因此,由亚伯耳判别法知,原级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

*)利用 2672 题的结果.

2783. 不连续函数的叙列可否一致收敛于连续函数?

**解** 可以. 例如,函数叙列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(x)\ (n=1,2,\cdots)$$

其中 $$\varphi(x)=\begin{cases}0,\text{若 } x \text{ 为无理数};\\1,\text{若 } x \text{ 为有理数}.\end{cases}$$

显然,$f_n(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上每一点均不连续,但由于

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots;-\infty<x<+\infty),$$

故当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致趋于零. 而 $f(x)\equiv 0(-\infty<x<+\infty)$ 显然是连续函数. 此例说明，不连续函数的叙列仍然可以一致收敛于连续函数.

2784. 证明：若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

**证** 由哥西准则及题设知：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，对于 $[a,b]$ 上的一切 $x$ 值，均有

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 $p$ 为任意自然数. 由于

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|$$
$$+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

故根据一致收敛的哥西准则知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛.

2785. 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$$

在 $[a,b]$ 上是否必定一致收敛？

**解** 未必. 例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$$

在$[0,1]$上绝对并一致收敛，但其绝对值级数不一致收敛。事实上，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$$

在$[0,1]$上收敛而不一致收敛*)。因此，我们只要证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在$[0,1]$上一致收敛就可以了。首先，当$x=0$及$x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(1-x)x^n$显然收敛。当$0<x<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$是交错级数且满足莱布尼兹条件，故也收敛。要证其一致收敛，只要证其余式$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k$一致趋于零（对$0\leqslant x\leqslant 1$）即可。按满足莱布尼兹条件的交错级数的余式估计，有

$$|R_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\ (0\leqslant x\leqslant 1).\ (1)$$

令$f(x)=(1-x)x^{n+1}$，通过求导数易知此函数在$x=\frac{n+1}{n+2}$时达到其在$0\leqslant x\leqslant 1$上的最大值，故当$0\leqslant x\leqslant 1$时，恒有

$$0\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}.$$

于是，由(1)式知

$$R_{N,p}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{N+1}\sin^2(2^{N+2}\pi x), & \\ \qquad\qquad \text{当 } x\in(2^{-(N+2)},2^{-(N+1)}), & \\ \dfrac{1}{N+2}\sin^2(2^{N+3}\pi x), & \\ \qquad\qquad \text{当 } x\in(2^{-(N+3)},2^{-(N+2)}); & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{1}{N+p}\sin^2(2^{N+p+1}\pi x), & \\ \qquad\qquad \text{当 } x\in(2^{-(N+p+1)},2^{-(N+p)}); & \\ 0, \qquad \text{其它点 } x & \end{cases}$$

因此，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有

$$|R_{N,p}(x)|<\frac{1}{N}.$$

由此即知：对于任给的 $\epsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于〔0,1〕上的一切 $x$ 值，均有 $|R_{N,p}(x)|<\epsilon$，其中 $p$ 为任意自然数。由哥西准则知，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在〔0,1〕上绝对收敛且一致收敛。下面证明：不可能用某正项收敛数项级数作为其强级数。采用反证法，假设有某收敛的强级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，其中 $a_n\geqslant 0$ 是常数，即在〔0,1〕上有

$$|f_n(x)|\leqslant a_n(n=1,2,\cdots), \tag{1}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，以下将说明由此引出矛盾。事实上，据(1)式对一切 $x\in$〔0,1〕均成立。今取 $x_n=\frac{3}{2}2^{-(n+1)}$，显然

有

$$2^{-(n+1)}<x_n<2^{-n}.$$

因此得

$$a_n \geqslant |f_n(x_n)|=\frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x_n)=\frac{1}{n}>0.$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛得知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$也应收敛，这与众所周知的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的发散结论相抵触. 证毕.

2787. 证明：若各项是单调函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$$

在闭区间[a,b]的端点绝对收敛，则此级数在闭区间[a,b]上绝对并一致收敛.

**证** 按题设，$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(a)|$与$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(b)|$均收敛. 令$a_n=\max(|\varphi_n(a)|,|\varphi_n(b)|$，由于$0\leqslant a_n\leqslant|\varphi_n(a)|+|\varphi_n(b)|$，故知

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

收敛. 由于$\varphi_n(x)$在[a,b]上是单调的，故

$$|\varphi_n(x)|\leqslant a_n(a\leqslant x\leqslant b; n=1,2,\cdots).$$

由外耳什特拉斯判别法知，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$$

在[a,b]上绝对并一致收敛.

2788. 证明：幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

**证** 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的收敛区间为$(-R,R)(R>0)$,$[a,b]\subset(-R,R)$. 令

$$r=\max(|a|,|b|),$$

则当 $x\in[a,b]$时,有

$$|a_n x^n|\leqslant|a_n|\cdot|r|^n=|a_n r^n|.$$

由题设知$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n r^n|$ 收敛,故原幂级数在$[a,b]$ 上绝对并一致收敛. 由$[a,b]$ 的任意性,本题获证.

2789. 设 $a_n\to\infty$ 且级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$ 收敛. 证明:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x-a_n}$$

在不包含点 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

**证** 设 $E$ 是任一不包含点 $a_n(n=1,2,\cdots)$的有界闭集,则存在常数 $M>0$,当 $x\in E$ 时有

$$|x|\leqslant M \text{ 且} \left|\frac{x}{a_n}\right|\neq 1(n=1,2,\cdots).$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{a_n}\right|$ 收敛,故$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a_n|}=0$. 因此,存在 $N$,使当 $n>N$,$x\in E$ 时,

$$\left|\frac{x}{a_n}\right|<\frac{1}{2}$$

于是，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x-a_n}\right|=\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{x}{a_n}\right|}\leqslant\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_n}\right|}$$

$$\leqslant\frac{1}{|a_n|}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{|a_n|}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{|a_n|}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{x-a_n}\right|$ 在 $E$ 上绝对并一致收敛.

2790. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则迪里黑里级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

**证** $0<\frac{1}{n^x}\leqslant 1$，且 $\frac{1}{n^x}$ 对每一个 $x\geqslant 0$ 是单调的. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛，故由亚伯耳判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

2791. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$$

在域 $x\geqslant 0$ 内一致收敛.

**证** $0<e^{-nx}\leqslant 1$，且 $e^{-nx}$ 对每一个 $x\geqslant 0$ 是单调的. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛，故由亚伯耳判别法知，级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 当 $x \geqslant 0$ 时一致收敛.

2792. 证明:函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

在域 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并有连续的导函数.

证 首先证明 $f(x)$ 连续.事实上,由 $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的收敛性即知,原级数当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛.又由于 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 的和 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

其次再证明 $f'(x)$ 连续.由于 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin nx}{n^3}\right) = \frac{\cos nx}{n^2}$ 连续,且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收敛,故再次根据函数项级数一致收敛的性质,即知上述级数的和在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,且有 $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

2793. 证明:函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(a) 除 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 外,在一切的点有定义并且是连续的;(б) 为周期函数,其周期等于 1.

**证** 考虑级数(1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$.
显然，当 $x\neq k(k=0,1,2\cdots)$ 时，级数(1)收敛；当 $x\neq -l(l=1,2,\cdots\cdots)$ 时，级数(2)收敛. 因此，当 $x\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时，级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 收敛.

(a) 因而在除 $x=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 外的一切点上 $f(x)$ 有定义. 下面为了证明 $f(x)$ 在任一点 $x=x_0(x_0\neq k,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处 $f(x)$ 连续，我们可以在 $([x_0],[x_0]+1)$ 内考虑一个包含 $x_0$ 的区间 $[a,b]$：

$$[x_0]<a<x_0<b<[x_0]+1.$$

记 $p=\max(|a|,|b|)$. 在 $[a,b]$ 上考虑级数(1)及(2). 当 $n$ 适当大时(例如 $n\geqslant n_0$)，由于

$$\left|\frac{1}{(n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|^2}\leqslant\frac{1}{(n-p)^2},$$

$$\left|\frac{1}{(-n-x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n-|x|)^2}\leqslant\frac{1}{(n-p)^2},$$

且 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-p)^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 从而，级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，也即 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 于是，其和函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，因而 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续.

(6) 当 $x\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 时，有 $f(x+1)=$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[n-(x+1)]^2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{[(n-1)-x]^2},$$作指标变换 $m=n-1$，则当 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时有 $m=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 因而得

$$f(x+1)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m-x)^2}=f(x),$$

上式表明，当 $x\neq0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时，$f(x)$ 是一个以 1 为周期的周期函数. 证毕.

**2794.** 证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

在闭区间 $0\leqslant x\leqslant1$ 上收敛但不一致收敛，而它的和在此线段上是连续函数.

**证**　考虑部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}[kxe^{-kx}-(k-1)xe^{-(k-1)x}]$$
$$=nxe^{-nx},$$

显然，在 $[0,1]$ 上其极限函数 $S(x)$ 存在（即级数的和）且连续：

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0.$$

但此级数在 $[0,1]$ 上不一致收敛. 用反证法. 若不然，即若一致收敛，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n\geqslant N$ 时，对于 $[0,1]$ 上的一切 $x$ 值，均有 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 今取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}e^{-1}$，应有

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}.$$

取 $x=x_0=\frac{1}{n}$，则也应有 $|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{2}e^{-1}$. 但另一方面，却有

$$|S_n(x_0)-S(x_0)|=S_n(x_0)=e^{-1}>\varepsilon_0,$$

矛盾. 证毕.

2795. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的连续性，设：

(a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$;

(б) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$;

(в) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

**解** (a) 由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|}=|x|$，故当 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛；而当 $|x|>1$ 时，级数发散. 当 $|x|=1$ 时，通项不趋于零，因而级数也发散. 于是，$f(x)$ 的存在域为 $(-1,1)$. 下面证明 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续. 设 $0<\delta<1$，则当 $|x|\leqslant 1-\delta$ 时，有

$$\left|(x+\frac{1}{n})^n\right|\leqslant(1-\delta+\frac{1}{n})^n.$$

上面已证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\delta+\frac{1}{n})^n$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+\frac{1}{n})^n$ 在 $[-1+\delta,1-\delta]$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在该区间上连续. 由于 $\delta$ 可以任意的小，故知 $f(x)$ 在开区间 $(-1,1)$ 内连续.

(б) $\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}=\frac{x}{x^2+n^2}+(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$.

由迪里黑里判别法易知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{x^2+n^2}$在整个数轴上一致收敛，故其和函数在整个数轴上连续．又对于任意的$M>0$，当$x\in[-M,M]$时，由于$\left|\frac{x}{x^2+n^2}\right|\leqslant\frac{M}{n^2}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+n^2}$在$[-M,M]$上一致收敛，从而其和函数在$[-M,M]$上连续．由$M$的任意性知上述和函数在整个数轴上连续．

于是，作为这两个级数的和$f(x)$在整个数轴上有定义且是连续的．

(в)由于当$-\infty<x<+\infty$且$x\neq0$时，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}}=\frac{1}{1+x^2}<1,$$

故此时级数绝对收敛．显然当$x=0$时级数收敛于零．于是，$f(x)$的存在域为$(-\infty,+\infty)$．

注意在任一点$x_0\neq0$上，例如$x_0>0$时，我们可选$a,b$使$0<a<x_0<b$．考虑$x\in[a,b]$，显然有

$$\left|\frac{x}{(1+x^2)^n}\right|\leqslant\frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b}{(1+a^2)^n}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$在$[a,b]$上一致收敛．注意每一个$\frac{x}{(1+x^2)^n}$连续，因而和函数$f(x)$在$[a,b]$上连续．于是，$f(x)$在$x=x_0$处连续（对于$x_0<0$的情况可同理证明），而且易得

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}=\frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1, x \neq x_0$ 上一致收敛. 另外，对于每个固定的 $k$，由于 $x_0 \neq r_k$，故当 $x$ 与 $x_0$ 充分近时，$(x - r_k)$ 必与 $(x_0 - r_k)$ 同号，由此易知

$$\lim_{x \to x_0} v_k(x) = \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k) \quad (k = 1, 2 \cdots).$$

从而，当 $x \to x_0$ 时，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 可逐项求极限，再根据(1) 式即得

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由此可知，$f(x)$ 在点 $x_0$ 可微且

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

现设 $x_0$ 是[0,1] 中一个有理点，于是 $x_0 = r_m$，$m$ 为某正整数. 这时，(1) 式为：当 $x \neq x_0$ 时，

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = v_m(x) + \sum_{k \neq m} v_k(x), \qquad (2)$$

其中 $v_m(x) = \dfrac{|x - r_m| - |x_0 - r_m|}{3^m (x - x_0)} = \dfrac{|x - x_0|}{3^m (x - x_0)}$

$$= \frac{1}{3^m} \operatorname{sgn}(x - x_0).$$

仿前段之证，可知：当 $x \to x_0$ 时，级数 $\sum_{k \neq m} v_k(x)$ 可逐项取极限，得

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{k \neq m} v_k(x) = \sum_{k \neq m} \lim_{x \to x_0} v_k(x)$$

$$= \sum_{k \neq m} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由于显然 $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} v_m(x) = \frac{1}{3^m}$，$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} v_m(x) = -\frac{1}{3^m}$，故极限 $\lim\limits_{x \to x_0} v_m(x)$ 不存在. 于是，根据（2）式即知极限 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 不存在，故 $f(x)$ 在点 $x_0$ 不可微. 证毕.

2797. 证明：黎曼ζ函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在域 $x > 1$ 内是连续的并且在此域内有各阶的连续导函数.

证　显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 当 $x > 1$ 时收敛. 各项求导数所得级数为 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$. 下证它在 $1 < a \leqslant x < +\infty$ 上一致收敛（$a$ 为大于一的任何数）. 事实上，当 $a \leqslant x < +\infty$ 时，有

$$0 < \frac{\ln n}{n^x} \leqslant \frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛（这是由于

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n^a} \Big/ \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}} = 0,$$

而 $\frac{a+1}{2} > 1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ 收敛），故知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 上一致收敛. 再注意到每项 $\frac{\ln n}{n^x}$ 都是 $x$ 的连续函

数，即知：在 $a \leqslant x < +\infty$ 上可逐项求导数，得

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \tag{1}$$

并且 $\zeta'(x)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 上连续．再由 $a > 1$ 的任意性即知(1)式对一切 $1 < x < +\infty$ 成立，并且 $\zeta'(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上连续．当然 $\zeta(x)$ 更在 $1 < x < +\infty$ 上连续．

利用数学归纳法，并注意到对任何正整数 $k$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ $(a > 1)$ 都收敛，仿照上述，可证：对任何正整数 $k$，$\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上都存在且连续，并且可由原级数逐项求导数 $k$ 次而得：

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x} \quad (1 < x < +\infty).$$

2798．证明：$\theta$ 函数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

当 $x > 0$ 时有定义并可微分无穷次．

证　首先，我们证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义且可微．

在级数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)$ 中，$u_n(x) = e^{-\pi n^2 x}$．显然有 $u_{-n}(x) = u_n(x)$，故只要考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} \quad (x > 0)$$

即可．对于每一个 $x > 0$ 及充分大的 $n$，有

$$0 < e^{-\pi n^2 x} < \frac{1}{n^2 x},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2x}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}$ 收敛. 对此级数逐项求导后，得级数

$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\pi n^2e^{-\pi n^2x},$$

它在 $[\varepsilon, +\infty)$ 内是一致收敛的（$\varepsilon$ 为任意正数）. 事实上，当 $n$ 充分大时，对一切 $\varepsilon\leqslant x<+\infty$，均有

$$0<\pi n^2e^{-\pi n^2x}\leqslant\pi n^2e^{-\pi n^2\varepsilon}<\frac{1}{n^2\varepsilon}$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2\varepsilon}$ 收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\pi n^2e^{-\pi n^2x}$$

在 $\varepsilon\leqslant x<+\infty$ 上一致收敛. 再注意到各项都是连续函数，即知级数

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}$$

在 $[\varepsilon,+\infty)$ 内连续可微，且可逐项求导数. 由 $\varepsilon>0$ 的任意性知 $\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微且可逐项求导数.

其次，仿照前段可证明 $\theta'(x)$ 的可微性.

再次，利用数学归纳法，并注意到当 $n$ 充分大时，对于一切 $x\in[\varepsilon,+\infty)$，均有

$$0<(\pi n^2)^ke^{-\pi n^2x}<\frac{1}{n^2\varepsilon},$$

仿照前段可证明 $\theta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微分 $k$ 次，其中 $k$ 为任意自然数，从而 $\theta(x)$ 当 $x>0$ 时可微分无穷次.

2799. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的可微分性，设：

(a) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$；(б) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n^2+x^2}$.

**解** (a) 易知当 $x\neq -k(k=1,2,\cdots,)$ 时，级数是莱布尼兹型，因而收敛. 任取 $x=x_0, x_0\neq -k(k=1,2,\cdots)$.

1° 当 $x_0\geqslant 0$，取 $\beta>x_0$，则 $x_0\in\left[-\frac{1}{2},\beta\right]$. 在区间 $\left[-\frac{1}{2},\beta\right]$ 上，注意 $u_n(x)=\frac{(-1)^n x}{n+x}$，有

$$u'_n(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}(n=1,2,\cdots)$$

且连续. $\frac{n}{(n+x)^2}$ 随 $n$ 单调下降且一致趋于零，事实上，当 $x\in\left[-\frac{1}{2},\beta\right], n>1$ 时，有

$$\left|\frac{n}{(n+x)^2}\right|\leqslant\frac{n}{(n-1)^2}\to 0(n\to\infty);$$

显然 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ 有界（小于或等于 1）. 因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 在 $[0,\beta]$ 上一致收敛. 从而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $[0,\beta]$ 上可微，当然它在 $x=x_0$ 点可微.

2° 当 $x_0<0$ 时，必有 $k_0$，使

$$-(k_0+1)<x_0<-k_0.$$

今选取 $\alpha,\beta$，使

$$-(k_0+1)<\alpha<x_0<\beta<-k_0.$$

在区间 $[\alpha,\beta]$ 上，$u'_n(x)=\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$ 连续且随 $n$ 单调下

降，并且一致趋于零（考虑充分大的 $n$）：

$$\left|\frac{n}{(n+x)^2}\right|=\frac{n}{n^2+2nx+x^2}\leqslant\frac{n}{n^2-2n|x|}$$

$$\leqslant\frac{n}{n^2-2n|\alpha|}=\frac{1}{n-2|\alpha|}$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty).$$

又显然知 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k$ 有界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 因而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在$[\alpha,\beta]$ 上可微，当然它在 $x=x_0$ 点可微.

总之，函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $x\neq -k(k=1,2,\cdots)$ 上有定义且可微.

(6) 当 $x=0$ 时，级数显然收敛.

当 $x\neq 0$ 时，由于

$$\frac{\dfrac{|x|}{n^2+x^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\frac{n^2}{n^2+x^2}|x|\longrightarrow|x| \qquad (n\to\infty),$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|}{n^2+x^2}$ 当 $x\neq 0$ 时也收敛. 从而可知 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|}{n^2+x^2}$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上收敛. 令

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+x^2},$$

显然它在$(-\infty,+\infty)$上收敛，故可记 $f(x)=|x|$

$\cdot\varphi(x)$. 任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，则有 $l>0$ 使 $-l<x_0<l$. 当 $x\in[-l,l]$时，由于

$$\left|\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'\right|=\left|\frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}\right|\leqslant\frac{2l}{n^4}$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{n^4}$ 收敛. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right)'$ 在$[-l,l]$上一致收敛. 从而知 $\varphi(x)$在$[-l,l]$上可微，当然它在 $x=x_0$ 点可微. 又因 $|x|$在 $x\neq0$ 点可微，而在 $x=0$ 点不可微，再注意到恒有 $\varphi(x)>0$，即知 $f(x)=|x|\varphi(x)$在 $x\neq0$ 点可微，而在 $x=0$ 点不可微.

**2800.** 证明：叙列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg}x^n\quad(n=1,2,\cdots)$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，但

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(1).$$

**证** 由于当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，

$$|\operatorname{arctg}x^n|\leqslant\frac{\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

故有

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{\pi}{2n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

易见$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 任给 $\varepsilon>0$，选取$N=\left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，对于一切的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2(N+1)}<\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{2\varepsilon}}=\varepsilon.$$

于是，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零. 但

$$f'_n(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

易见

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}=f'(x)|_{x=1}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(1)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此，两个极限不相等. 值得注意的是，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零，但$f'_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内却不一致收敛于其极限函数：

$$\lim_{n\to\infty}f'_n(x)=\begin{cases}0,当\ x\neq 1;\\ \frac{1}{2},当\ x=1.\end{cases}$$

2801. 证明：叙列

$$f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，但

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(x).$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=x^2=f(x)$. 由于当$x\in(-\infty,+\infty)$时

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{n},$$

故对任给$\varepsilon>0$，只要取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，对于一切$x\in(-\infty,+\infty)$，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛.

其次，由于

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'=(x^2)'=2x,$$

而 $f'_n(x)=2x+\cos n(x+\frac{\pi}{2})$ 当 $n\to\infty$ 时极限不存在，当然有

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

2802. 当参数 $\alpha$ 取甚么值：(a)叙列

$$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}(n=1,2,\cdots) \qquad (1)$$

在闭区间[0,1]上收敛；(б)叙列(1)在[0,1]上一致收敛；(в)$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$可在积分号下取极限？

**解** (a)当 $x=0$ 时，对于任意 $\alpha$，均有 $f_n(x)=0$；当$x\neq 0$ 且 $x\in(0,1]$时，对于任意 $\alpha$，均有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}xe^{-nx}=0.$$

因此，对于任意的 $\alpha$，$f_n(x)$ 在[0,1]上收敛于函数 $f(x)=0$.

(б)由于 $f'_n(x)=n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx)$，故当 $x=\frac{1}{n}$时，$f'_n(x)=0$. 又由于当 $x<\frac{1}{n}$时，$f'_n(x)>0$；当 $x>\frac{1}{n}$时，$f'_n(x)<0$，故 $x=\frac{1}{n}$为 $f_n(x)$在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最大值点. 因此，

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(\frac{1}{n})=n^{\alpha-1}e^{-1} \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

当 $\alpha<1$ 且 $n\to\infty$时，$n^{\alpha-1}e^{-1}\to 0$. 于是，当 $\alpha<1$ 时，对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N$，使当 $n>N$ 时，对于一切的 $x\in[0,1]$，均有

$$|f_n(x)-0|<\varepsilon,$$

即当 $\alpha<1$ 时，$f_n(x)$在[0,1]上一致收敛于零. 当 $\alpha\geqslant 1$

注意到

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

本题获证.

2804. 证明:叙列

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

在闭区间$[0,1]$上收敛而不一致收敛,但

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx.$$

**证** 先证 $f_n(x)$ 在$[0,1]$上收敛. 事实上,当 $x=0$ 及 $x=1$时,对任意的 $n$,均有 $f_n(x)=0$;而当 $0<x<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nx(1-x)^n = 0$. 因此,$f_n(x)$在$[0,1]$上收敛于零.

下证 $f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛. 为此,取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2e}$,不论 $n$ 多么大,只要取 $x_n=\frac{1}{n+1}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)-0\right| = n\cdot\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow e^{-1} \quad (n\to\infty).$$

那末取适当大的 $n_0$,当 $n>n_0$ 时,就有

$$|f_n(x_n)| > \frac{1}{2e} > \varepsilon_0.$$

因此,$f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

最后证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]dx$.

注意到

$$\int_0^1[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]dx=\int_0^1 0\cdot dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(1-y)y^n dy$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}y^{n+1}-\frac{n}{n+2}y^{n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}=0,$$

故得证.

2805. 于下式中

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}dx$$

在积分符号下取极限合理否?

**解** 由于

$$\int_0^1\left[\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}\right]dx=\int_0^1 0\cdot dx=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\text{arc tg}nx^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4},$$

故在积分号下取极限不合理.

一般说来,若叙列 $f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛,则是保证在积分号下取极限为合理的一个充分条件,但当它不一致收敛时,则就不一定能保证可以在积分号下取极限了,本题就是其中一例. 事实上,取 $\varepsilon_0$ 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 $n$ 多么大,只要取 $x=\frac{1}{n}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^4}}>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^4}$ 在〔0,1〕上并不一致收敛.

求出:

**2806.** $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$.

**解** 由于 $x\longrightarrow1-0$,故可设 $0\leqslant x\leqslant1$. 此时,由于 $\frac{x^n}{x^n+1}$ 小于 1,且当 $n$ 增加时单调下降,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

在〔0,1〕上一致收敛,故根据亚伯耳判别法知,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\tag{1}$$

在〔0,1〕上一致收敛. 又因 $\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$ 在〔0,1〕上连续,且

$$\lim_{x\to1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

故当 $x\longrightarrow1-0$ 时,级数(1)可以逐项取极限,其结果为

$$\lim_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to1-0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2}\ln 2^{*)}.$$

*） 利用 2661 题的结果.

**2807.** $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$.

**解** 由于 $x\to 1-0$，故可设 $0\leqslant x<1$. 在此区间上，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x} = x$，故

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = \lim_{x\to 1-0} x = 1.$$

**2808.** $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

**解** 由于 $\frac{1}{n^x}$ 在 $[0,l]$ $(l>0)$ 上单调下降且小于或等于 1，而数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 在 $[0,l]$ 上一致收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0,l]$ 上一致收敛. 又因 $\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0,l]$ 上连续，且

$$\lim_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n},$$

故当 $x\to +0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ 可以逐项取极限，其结果为

$$\lim_{x\to +0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to +0}\frac{1}{2^n n^x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

**2809.** 逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n^2}$ 合理否？

**解** 由于当$-\infty<x<+\infty$时，

$$\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n^2}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{n^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{n^2}{n^4+x^2}\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故逐项微分后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)'_x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$$

在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，再由$\left|\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{n^2}$知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n^2}$ 收敛；因此，原级数和的导数用逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n^2}$ 来计算是合理的.

**2810.** 在闭区间$[0,1]$上逐项积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

合理否？

**解** 令$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x^{\frac{1}{2k+1}}-x^{\frac{1}{2k-1}}\right)$，则当$x=0,1$时，$S_n(x)=0$；当$0<x<1$时，$S_n(x)=x^{\frac{1}{2n+1}}-x$. 因此，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0,\text{当 } x=0,1;\\1-x,\text{当 } 0<x<1.\end{cases}$$

取$\varepsilon_0$使$0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论$n$多么大，只要取$x_n=\frac{1}{2^{2n+1}}$就有

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此，$S_n(x)$ 在$[0,1]$上不一致收敛.

注意，对于不一致收敛的级数而言，一般地讲逐项积分级数不一定合理. 但对于本题来说，由于

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)\right] dx = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2},$$

故本题所给出的级数在$[0,1]$上作逐项积分计算还是对的.

由此题说明，级数在$[a,b]$上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件，并不是必要条件.

**2811.** 设$f(x)(-\infty < x < +\infty)$是可微分任何次的函数，且其导函数$f^{(n)}(x)(n = 1,2,\cdots)$的叙列在每一个有穷区间$(a,b)$内一致收敛于函数$\varphi(x)$. 证明$\varphi(x) = Ce^x$，其中$C$为常数.

**证** 由于$f(x)$可微分任意次，故$f^{(n)}(x)$在$(a,b)$内连续且可微($n = 1,2,\cdots$). 又按题设$f^{(n)}(x)$在$(a,b)$内一致收敛于$\varphi(x)$，且其导函数叙列$f^{(n+1)}(x)(n = 1,2,\cdots)$在$(a,b)$内也一致收敛于$\varphi(x)$，故$\varphi(x)$在$(a,b)$内可微，并且

$$\varphi'(x) = [\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)]' = \lim_{n\to\infty}[f^{(n)}(x)]'$$
$$= \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)}(x) = \varphi(x).$$

积分之,即得

$$\ln\varphi(x) = x + C_1,$$

也即

$$\varphi(x) = Ce^x,$$

其中 $C = e^{C_1}$ 为常数.

## §5. 幂级数

1° 收敛区间 对于每一个幂级数

$$a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

都存在有收敛区间:$|x-a|\leqslant R$,已知的级数在其内收敛,而在其外发散.收敛半径 $R$ 可按哥西—哈达玛公式

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定.

收敛半径 $R$ 也可按公式

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

来计算(若此极限存在).

2° 亚伯耳定理 若幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (|x|<R)$ 在收敛区间的端点 $x=R$ 处收敛,则

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3° 台劳级数 在 $a$ 点的解析函数可展为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

可以写成下形

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

(拉格朗日形式)或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta_1(x-a)]}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}$$

$$(0<\theta_1<1)$$

(哥西形式).

必须记住下列五个基本的展开式:

Ⅰ. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$.

Ⅱ. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$

$(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅲ. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅳ. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$

$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$

$(-1<x<1)$.

Ⅴ. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$

$+ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (-1<x\leqslant 1)$.

4° **幂级数的运算** 在公共的收敛区间 $|x-a|<R$ 内有:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(x-a)^n$;

(б) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$,

式中 $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$；

(в) $\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n$；

(Г) $\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n\right]dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

5° 在复数域内的幂级数　研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n.$$

式中　$c_n = a_n + ib_n, a = \alpha + i\beta, z = x + iy, i = \sqrt{-1}$. 对于每一个如像这样的级数都有一收敛圆 $|z-a| \leqslant R$，原来的级数在其内收敛（并且是绝对地），而在其外发散．收敛半径 $R$ 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

在实数域内的收敛半径．

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质：

**2812.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

**解**　记 $a_n=\frac{1}{n^p}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时，若 $p>1$，则幂级数为绝对收敛；若 $0<p\leqslant1$，则为条件收敛；当 $p\leqslant0$ 时，则为发散．

当 $x=1$ 时，若 $p>1$，则为绝对收敛；若 $p\leqslant1$ 则为发散．

$(x+1)^n$ 条件收敛.

当 $x=-\frac{2}{3}$ 时,幂级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}.$$

由于上式右端第一个级数发散,第二个级数收敛,故原级数发散.

2814. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

**解** 记 $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}=4,$$

故收敛半径 $R=4$;收敛区间为 $(-4,4)$.

当 $x=-4$ 时,利用斯特林格公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}(1+o(1))$$

得

$$\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n\right|=\frac{(\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n})^2+o(1)}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}+o(1)}\cdot 4^n$$

$$=\sqrt{n\pi}(1+o(1))\to+\infty(n\to\infty),$$

因此,当 $x=-4$ 时级数发散.

当 $x=4$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+2}\right)=-\frac{1}{2}<1,$$

故由拉阿伯判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

2815. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2}\cdot x^n (0<a<1)$.

**解** 记 $a_n=a^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{2n+1}}=+\infty,$$

故收敛半径 $R=+\infty$；收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

2816. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

**解** 记 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right]^n\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{e},$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{e}$；收敛区间为 $\left(-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right)$.

当 $|x|=\frac{1}{e}$ 时，由于

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{e}\right)^n\cdot(\pm 1)^n\right|\to 1\neq 0 (n\to\infty),$$

故级数发散．

2817. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n(a>1)$.

**解** 记 $a_n=\frac{n!}{a^{n^2}}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{n+1}=+\infty,$$

故收敛半径 $R=+\infty$；收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$.

2818. $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

**解** 记 $a_n=\left[\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}2\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p=2,$$

故收敛半径 $R=2$；收敛区间为 $(-2+1,2+1)$，即 $(-1,3)$.

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p,$$

由 2689 题的结果知：若 $p>2$，为绝对收敛；若 $0<p\leqslant2$，为条件收敛；若 $p\leqslant0$，为发散．

当 $x=3$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^p.$$

若 $p>2$，为绝对收敛；若 $p\leqslant2$，为发散．

2819. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

**解** 记 $a_n=(-1)^n\left[\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^p=2^p,$$

故收敛半径 $R=2^p$；收敛区间为 $(-2^p,2^p)$.

当 $x=-2^p$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

由于

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{2n+3}{2n+2}\right)^p=\left(1+\frac{1}{2n+2}\right)^p$$

$$=1+\frac{p}{2n+2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+\frac{p}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故由高斯判别法知：当 $\frac{p}{2}>1$（即 $p>2$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛（由于是正项级数，故也是绝对收敛）；当 $\frac{p}{2}\leqslant 1$（即 $p\leqslant 2$）时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

当 $x=2^p$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right]^p, \tag{1}$$

由前段知，当 $p>2$ 时，为绝对收敛；当 $0<p\leqslant 2$ 时，由于

$$\left|(-1)^n\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p\right|$$

$$\sim\left[\frac{4^n\cdot 2n\pi\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}}{\sqrt{(4n+2)\pi}\cdot(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)}}\right]^p$$

$$=\left[\frac{4^n\cdot 2\pi e}{\sqrt{(4n+2)\pi}\cdot 2^{2n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}}\right]^p\to 0$$

$(n\to\infty)$,

且

$$\frac{\left[\frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+3)!}\right]^p}{\left[\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p}=\left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^p<1,$$

故级数(1)逐项下降，根据莱布尼兹判别法知级数(1)收敛，但由于由其绝对值组成的级数发散．因此，当$0<p\leqslant 2$时，级数(1)条件收敛．当 $p=0$ 时，通项为$(-1)^n$，故级数为发散；当 $p<0$ 时，通项趋于无穷，因而级数也发散．

2820．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$.

**解**　记 $a_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$．由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right|=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为$(-1,1)$．

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n},$$

利用 2700 题的结果，即知：当 $m\geqslant 0$ 时，绝对收敛；当 $-1<m<0$时，条件收敛；当 $m\leqslant -1$ 时，发散．

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n},$$

显见当 $m\geqslant 0$ 时为绝对收敛；当 $m<0$ 时：若 $m$ 为负整

数，设为$-k$（$k$为正整数），则通项为

$$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!}\to+\infty$$
$$(n\to\infty),$$

故级数发散；若$m$不为负整数，由于通项为正，并且总可以大于$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$，其中$-m>k$，故级数也发散．因此，当$m<0$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{m}{n}$发散．

2821．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n(a>0,b>0)$．

**解** 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n\text{ 及}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为$R_1=\frac{1}{a}$及$R_2=\frac{1}{b}$，故原级数的收敛半径$R=\min(R_1,R_2)=\min\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$；收敛区间为$(-R,R)$．

当$x=-R$时，若$a<b$，则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},\qquad(1)$$

对于上式右端的第一个级数，利用达朗伯耳判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}}\right|=\frac{a}{b}<1,$$

故知其为绝对收敛，而第二个级数显然为绝对收敛．因此，当 $a<b$ 时，级数(1)绝对收敛．当 $a\geqslant b$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n, \qquad (2)$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛($b<a$)或条件收敛($b=a$)，故当 $a\geqslant b$ 时，级数(2)条件收敛．

当 $x=R$ 时，若 $a<b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

由前段知其为绝对收敛；若 $a\geqslant b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数．

**2822.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}(a>0,b>0)$.

**解** 记 $a_n=\frac{1}{a^n+b^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\max(a,b)\cdot\frac{1+\theta^{n+1}}{1+\theta^n}=\max(a,b),$$

其中 $\theta=\frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}$, $0<\theta\leqslant1$, 故收敛半径 $R=\max(a,b)$；收敛区间为 $(-R,R)$.

当 $|x|=R$ 时，由于 $\frac{R^n}{a^n+b^n}\to1\neq0$，故级数发散.

2823. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}(a>0)$.

**解** 记 $a_n=\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}.$$

由于

$$n\left(\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{a^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}}-1\right)=\frac{a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}\cdot\frac{n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

且上式右端第一个因式当 $n\to\infty$ 时趋于 $\ln a$，故当 $a>1$ 时，上式趋于 $+\infty$，因而级数收敛；当 $a<1$ 时，上式趋于 $-\infty$，因而级数发散；而当 $a=1$ 时，由于通项为 1，故级数也发散.

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}.$$

当 $a>1$ 时，级数绝对收敛；当 $a\leqslant 1$ 时，由于通项不趋于零，故级数发散．

总之，当 $|x|=1$ 时，若 $a>1$，则级数绝对收敛；若 $a\leqslant 1$，则级数发散．

2824. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

**解** 记 $a_n=\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty} 3^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}. \tag{1}$$

由于

$$0<\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$ 收敛 *)，故级数(1)收敛．

当 $x=-1$ 时，级数绝对收敛．

总之，当 $|x|=1$ 时，级数绝对收敛．

*）利用 2823 题的结果．

2825. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n}>0$$

且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故级数(1)发散．

当$x=1$时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{2}$$

由于

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n=0$. 又由于

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1\quad(n=1,2,\cdots),$$

故$|a_n|>|a_{n+1}|$. 因此，级数(2)收敛．但由于级数(1)发散，故级数(2)条件收敛．

2827. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

**解** 记$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,$$

故收敛半径$R=1$；收敛区间为$(-1,1)$.

当$|x|=1$时，由于$a_n\to+\infty(n\to\infty)$，故级数发散．

2828. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

**解** 记$a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4,$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{4}$；收敛区间为 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

当 $x=\frac{1}{4}$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n\cdot 4^n}. \tag{1}$$

将它拆成两部分，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$，一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$. 前一级数显然发散；而对于后一级数，利用哥西判别法或达朗伯耳判别法易知其为收敛. 因此，级数(1) 发散.

当 $x=-\frac{1}{4}$，同法可证，原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数. 因此，它也是发散的.

2829. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n$.

**解** 记 $a_n=\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=3,$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{3}$；收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

当 $|x|=\frac{1}{3}$ 时，对于 $n=8k$，由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k}\cdot\frac{1}{3^{8k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$$

及

$$\frac{1}{\ln k+\ln 8} > \frac{1}{k+\ln 8} > 0,$$

且$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \ln 8}$发散，故级数$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$发散.

不难证明：当 $n = 8k + 1, 8k + 2, \cdots, 8k + 7$ $(k = 1,2,\cdots)$ 时，级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n}\left(\pm\frac{1}{3}\right)^n \qquad (1)$$

收敛. 事实上，$\frac{1}{\ln n}$单调趋于零，且

$$\sum_{n=2}^{m}\left|\left(1 + 2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n\right| \cdot \frac{1}{3^n}$$

$$\leqslant \sum_{n=2}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n < \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3}\right)^n$$

$$< \frac{1+\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{2}}{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} < 5,$$

根据迪里黑里判别法可知级数(1)收敛.

于是，当$|x| = \frac{1}{3}$时，原级数是由一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的. 因此，它是发散的.

2830. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

**解** 记 $a_n=\frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}\text{ 及}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $|x|=1$ 时，由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

收敛，故原级数绝对收敛.

2831. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$（普林斯格木级数）.

**解** 记 $a_n=\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n},$$

它是条件收敛的 $^{*)}$.

当 $x=-1$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

记 $A_l=\{n\mid[\sqrt{n}]=l\}(l=1,2,\cdots)$. 显然 $A_l$ 内的元素可写成 $n=l^2+s$，而 $s=0,1,2,\cdots,2l$.

考虑

$$u_l=\sum_{n\in A_l}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n}=\sum_{s=0}^{2l}\frac{(-1)^{l^2+l+s}}{l^2+s}$$

$$= \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^s}{l^2+s}$$

$$= \frac{1}{l^2} - \left(\frac{1}{l^2+1} - \frac{1}{l^2+2}\right) - \cdots$$

$$- \left(\frac{1}{l^2+2l-1} - \frac{1}{l^2+2l}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{l^2} (l = 1,2,\cdots).$$

由于$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$收敛，故$\sum_{l=1}^{\infty} u_l$收敛．注意$A_i \cap A_j = 0$ $(i \neq j)$，且$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$就是全体自然数．易证$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$与$\sum_{l=1}^{\infty} u_l$同时收敛或同时发散．由此可见，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，因而显然是条件收敛的．

*） 利用2672题的结果．

2832. 求超越几何级数

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n$$
$$+ \cdots$$

的收敛域．

**解** 记$a_n$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1,$$

故收敛半径$R=1$；收敛区间为$(-1,1)$．

当 $x=1$ 时，级数为

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$
$$+\cdots.$$

由于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}(|\theta_n|\leqslant L),$$

故当 $\gamma-\alpha-\beta+1>1$ 即 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，级数收敛且也是绝对收敛的；当 $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时，级数发散．

当 $x=-1$ 时．由上可知，

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta_n}{n^2},$$

当 $\gamma-\alpha-\beta>0$ 时，级数绝对收敛；当 $\gamma-\alpha-\beta<-1$ 时，从某项开始，将有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1 \quad \text{即} |a_n|<|a_{n+1}|,$$

$a_n$ 不趋于零，级数发散；当 $-1<\gamma-\alpha-\beta$ 时，在弃去若干个开始项以后，就变成每项的绝对值单调递减的交错级数了，并在这里，把求通项（绝对值）的极限化成下列无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$$

的值更为方便．由于

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\theta'_n}{n^2}\right)$$

$$=-\infty \qquad (|\theta'_n|\leqslant M),$$

故上述无穷乘积的值为零，即 $a_n\to 0(n\to\infty)$. 因此，级数收敛. 当 $\gamma-\alpha-\beta=-1$ 时，由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\theta'_n}{n^2}$，故无穷乘积的值异于零，因而 $a_n\not\to 0$，级数发散.

综上所述，现将超越几何级数的敛散情况列表如下：

| | | |
|---|---|---|
| $\|x\|<1$ | | 绝对收敛 |
| $\|x\|>1$ | | 发　散 |
| $x=1$ | $\gamma-\alpha-\beta>0$ | 绝对收敛 |
| | $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ | 发　散 |
| $x=-1$ | $\gamma-\alpha-\beta>0$ | 绝对收敛 |
| | $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ | 条件收敛 |
| | $\gamma-\alpha-\beta\leqslant -1$ | 发　散 |

求下列广义的幂级数的收敛域：

2833. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

**解** 记 $a_n=\frac{1}{2n+1}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1,$$

故当 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ （即 $x>0$）时，级数绝对收敛；当 $x<0$ 时，级数发散；当 $x=0$ 时，级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1},$$

显然发散. 于是，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

的收敛域为$(0,+\infty)$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$.

**解** 记$a_n=\sin\frac{\pi}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=2,$$

故当$\left|\frac{1}{x}\right|<2$即当$|x|>\frac{1}{2}$时,级数绝对收敛;当$|x|<\frac{1}{2}$时,级数发散;当$|x|=\frac{1}{2}$时,由于

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}=\pi\neq0,$$

故级数发散. 于是,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$$

的收敛域为$(-\infty,-\frac{1}{2})$及$(\frac{1}{2},+\infty)$,即满足不等式$|x|>\frac{1}{2}$的一切$x$值所成的集合.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.

**解** $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{x^n}{2^{n^2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\cdot\frac{1}{x^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}.$

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$$

的收敛域为$(-\infty,+\infty)$*). 而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}}\cdot\frac{1}{x^n}$$

的收敛域为$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$. 因此，级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2^{n^2}}x^n$$

的收敛域为$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$，即满足不等式$0<|x|<+\infty$的一切$x$值所成的集合.

*) 利用2815题的结果.

**2836.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

**解** 记$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$，则原级数为$\sum_{n=1}a_n(e^{-x})^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1},$$

故当$|e^{-x}|<\frac{1}{e^{-1}}=e$即当$1+x>0$或$x>-1$时，级数绝对收敛；当$x<-1$时，级数发散；当$x=-1$时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n=1\neq0,$$

**解** 方法一：

$$f(x)=[(x+1)-1]^3$$
$$=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1.$$

方法二：

$f(-1)=-1, f'(-1)=3, f''(-1)=-6,$

$f'''(-1)=6, f^{(4)}(-1)=f^{(5)}(-1)=\cdots=0.$

于是，

$$f(x)=-1+3(x+1)-\frac{6}{2!}(x+1)^2+\frac{6}{3!}(x+1)^3$$
$$=-1+3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3.$$

2839. 把函数

$$f(x)=\frac{1}{a+x}\ (a\neq 0)$$

按以下的方式展为幂级数：(a)依 $x$ 的乘幂展开；(б)依二项式 $x-b$ 的乘幂展开，此处 $b\neq a$；(в)依 $\frac{1}{x}$ 的乘幂展开．求出对应的收敛域．

**解** (a) $f(x)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}},$$

收敛域为 $|x|<|a|$.

(б) $f(x)=\frac{1}{a-b-(x-b)}$

$$=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}},$$

收敛域为 $|x-b| < |a-b|$.

(в) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{a}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{x}}$

$$= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}},$$

收敛域为 $|x| > |a|$.

2840. 把函数 $f(x) = \ln x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂来展开，并说明展开式的收敛区间．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和．

**解** $f(x) = \ln[1 + (x-1)]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}. \qquad (1)$$

收敛区间为

$|x-1| < 1$ 或 $0 < x < 2$.

当 $x - 1 = 1$ 即当 $x = 2$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

显然收敛，故当 $0 < x \leqslant 2$ 时，级数(1) 收敛．

由于 $\ln x$ 在 $x = 2$ 连续，故当 $x = 2$ 时，(1) 式也成立，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

写出下列函数按变数 $x$ 的正整数幂的展开式，并求出对应的收敛区间：

2841. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

**解** $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n\,!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\,!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!},$$

收敛区间为 $|x|<+\infty$ 或$(-\infty,+\infty)$.

2842. $f(x)=\operatorname{ch}x$.

**解** $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}$,

收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2843. $f(x)=\sin^2x$.

**解** $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)\,!}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)\,!},$$

收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2844. $f(x)=a^x(a>0)$.

**解** $f(x)=e^{x\ln a}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n\,!}x^n$. 由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{\ln^n a}{n\,!}\right|}=|\ln a|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n\,!}}=0,$$

故收敛半径 $R=+\infty$,收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2845. $f(x)=\sin(u\arcsin x)$.

**解** $\arcsin x=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$=\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4+\cdots\right)dt$$

$$=x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5+\cdots$$

$$(|x|<1),$$

$$f(x)=u\arcsin x-\frac{u^3}{3!}(\arcsin x)^3$$

$$+\frac{u^5}{5!}(\arcsin x)^5-\cdots$$

$$=ux+\frac{u(1^2-u^2)}{3!}x^3$$

$$+\frac{u(1^2-u^2)(3^2-u^2)}{5!}x^5+\cdots,$$

收敛区间为$(-1,1)$.

**2846.** $f(x)=\cos(u\arcsin x)$.

**解** $f(x)=1-\dfrac{u^2}{2!}(\arcsin x)^2$

$$+\frac{u^4}{4!}(\arcsin x)^4-\cdots$$

$$=1-\frac{u^2}{2!}x^2-\frac{u^2(2^2-u^2)}{u!}x^4-\cdots.$$

收敛区间为$(-1,1)$.

**2847.** 写出函数 $f(x)=x^x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂展开式的前三项.

**解** $f(x)=x^x,f(1)=1;$

$f'(x)=x^x(1+\ln x),f'(1)=1;$

$f''(x)=x^x(1+\ln x)^2+x^{x-1},f''(1)=2;$

$$f'''(x)=x^x(1+\ln x)^3+2x^{x-1}$$

$$+x^{x-1}\left(\ln x+\frac{x-1}{x}\right),$$

$f'''(1)=3.$

于是，展式的前三项为

$$1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\cdots,$$

收敛区间为$|x-1|<1$，即 $0<x<2$.

2848. 写出函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}(x\neq0)$和 $f(0)=e$ 按变数 $x$ 的正整数幂展开式的前三项.

**解** $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}, f(0)=e$;

$$f'(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right)+\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right]$$

$$\doteq(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]\quad(x\neq0).$$

由微分学中值定理知

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi),$$

其中 $\xi$ 介于 0 与 $x$ 之间，从而

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}f'(\xi)$$

$$=\lim_{\xi\to0}f'(\xi)=-\frac{e}{2};$$

$$f''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2+\frac{2}{x^3}\ln(1+x)-\frac{1}{x^2(1+x)}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}\right\}$$

$$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^2+\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o_1(x)\right\}$$

$$(x\neq 0).$$

仿上可得

$$f''(0)=\frac{11}{12}e;$$

$$f'''(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\left\{\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]^3\right.$$
$$+3\left[\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{1}{1+x}+o(x)\right]$$
$$\cdot\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}+o_1(x)\right]$$
$$+\left[-\frac{6}{x^4}\ln(1+x)+\frac{2}{x^3(1+x)}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{(1+x)^3}\right]\right\}$$
$$(x\neq 0).$$

同理可得

$$f'''(0)=-\frac{21}{8}e.$$

于是,展式的前三项为

$$e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\cdots\right),$$

收敛区间为$(-1,1)$.

**2849.** 把函数 $\sin(x+h)$和 $\cos(x+h)$按变数 $h$ 的正整数幂展开.

**解** $\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$

$$=\sin x\cdot\left(1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\cdots\right)$$
$$+\cos x\cdot\left(h-\frac{h^3}{3!}+\frac{h^5}{5!}-\cdots\right)$$
$$=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\cdots,$$

同法可求得

$$\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2!}\cos x$$

$$+\frac{h^3}{3!}\sin x+\cdots,$$

它们的收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

2850. 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$ 的幂级数展开式的收敛区间:(a)依 $x$ 的乘幂展开;(6)依二项式 $x-5$ 的乘幂展开.

**解** (a)由于

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

及等式右端第一项的展开式的收敛区间为$(-2,2)$,而第二项的展开式的收敛区间为$(-3,3)$,故取其公共部分即得函数 $f(x)$展为关于 $x$ 的乘幂的幂级数的收敛区间$(-2,2)$.

(6) $$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{3}{(x-5)+2}-\frac{2}{(x-5)+3}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{2}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-5}{3}}.$$

上式右端第一项的展开式的收敛区间为$|x-5|<2$,而第二项展开式的收敛区间为$|x-5|<3$,取其公共部分,即得函数 $f(x)$展为关于 $x-5$ 乘幂的幂级数的收敛区间为$|x-5|<2$ 或$(3,7)$.

利用 I — V 基本展开式,写出下列函数关于 $x$ 的幂级

数展开式：

2851. $e^{-x^2}$.

**解** $$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\quad(|x|<+\infty)$$

2852. $\cos^2 x$.

**解** $$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$
$$(|x|<+\infty).$$

2853. $\sin^3 x$.

**解** $$\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$
$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$(|x|<+\infty).$$

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

**解** $$\frac{x^{10}}{1-x}=x^{10}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=10}^{\infty}x^n(|x|<1).$$

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

解 $\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}$

$$=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n(|x|<1).$$

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

解 $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}=x(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$

$$=x\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)\right.$$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2$$

$$\left.+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3+\cdots\right]$$

$$=x+x^2+\frac{1\cdot 3}{2!}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}x^4+\cdots$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}\qquad\left(|x|<\frac{1}{2}\right).$$

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，上式右端为一交错级数

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

利用 2689 题的结果，即知它是收敛的.

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n \quad (|x|<1).$$

**2860.** $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

**解** $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^2)}$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n {}^{*)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right]x^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n \quad (|x|<1).$$

*) 利用 2855 题的结果.

**2861.** $\dfrac{1}{1-x-x^2}$.

**解** $\dfrac{1}{1-x-x^2}=\dfrac{1}{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^{-1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\sqrt{5}+1}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1}\right.$$

$$+(-1)^n\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1}\Bigg]x^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\Bigg]x^n$$

$$\left(|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

**2862.** $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

**解** $$\frac{1}{1+x+x^2}$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\Bigg(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}$$

$$-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x\right)^{-1}\Bigg)$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}x^n\Bigg)$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Bigg[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\Bigg]x^n.$$

由于

$$(-1)^n\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right.$$

$$\left.-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi+i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\right.$$

$$\left.-\left(\cos\frac{n+1}{3}\pi-i\sin\frac{n+1}{3}\pi\right)\right]$$

$$=(-1)^n\cdot 2i\sin\frac{n+1}{3}\pi$$

$$=2i\cdot(-1)^n\sin\left[(n+1)\pi-\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\cdot\left[-\cos(n+1)\pi\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi\right]$$

$$=2i\cdot(-1)^n\cdot(-1)\cdot(-1)^{n+1}\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi$$

$$=2i\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

故得

$$\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2(n+1)}{3}\pi,$$

其中$|x|<\min\left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|},\frac{2}{|1-i\sqrt{3}|}\right)=1$，

即$|x|<1$.

**2863.** $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

**解** $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

$$=-1-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right.$$

$$+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$$

$$+\frac{1}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha-i\sin n\alpha+\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,$$

其中$|x|<\min\left(\frac{1}{|\cos\alpha+i\sin\alpha|},\frac{1}{|\cos\alpha-i\sin\alpha|}\right)=1.$

**2864.** $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ *).

**解** $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

$$=\frac{ix}{2}\Big[\frac{1}{x-(\cos\alpha-i\sin\alpha)}$$

$$-\frac{1}{x-(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=\frac{ix}{2}\Big[-\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}$$

$$+\frac{\cos\alpha-i\sin\alpha}{1-x(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\Big]$$

$$=\frac{ix}{2}\Big[-\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n+1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-i\sin\alpha)^{n+1}\Big]$$

$$=\frac{ix}{2}\sum_{n=0}^{\infty}x^n[-\cos(n+1)\alpha-i\sin(n+1)\alpha$$

$$+\cos(n+1)\alpha-i\sin(n+1)\alpha]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\sin(n+1)\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin n\alpha,$$

其中$|x|<1$.

*) 译本误为$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

**2865.** $\frac{x\text{sh}\alpha}{1-2x\text{ch}\alpha+x^2}$.

**解** $$\frac{x\text{sh}\alpha}{1-2x\text{ch}\alpha+x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ch}\alpha+\text{sh}\alpha}{x-(\text{ch}\alpha+\text{sh}\alpha)}-\frac{\text{ch}\alpha-\text{sh}\alpha}{x-(\text{ch}\alpha-\text{sh}\alpha)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^\alpha}{x-e^\alpha}-\frac{e^{-\alpha}}{x-e^{-\alpha}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-xe^{-\alpha}}+\frac{1}{1-xe^\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}x^ne^{-n\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}x^ne^{n\alpha}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\text{sh}n\alpha,$$

其中 $|x|<\min(e^{-\alpha},e^\alpha)=e^{-|\alpha|}$.

**2866.** $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

**解** $$\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\quad(|x|<1).$$

**2867.** $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

**解** $\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$=\ln[(1+x)(1+x^2)]=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$$

但

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\quad(-1<x\leqslant 1),$$

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

故当 $-1<x\leqslant 1$ 时,有

$$\ln(1+x+x^2+x^3)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{\left(\frac{m}{2}\right)-1}(1+(-1)^m)\frac{x^m}{m}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{\left(\frac{m}{2}\right)-1}(1+(-1)^m)}{m}x^m.$$

**2868.** $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

**解** 首先注意到

$$e^{x\cos\alpha+ix\sin\alpha}=e^{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)}=e^{xe^{i\alpha}}$$

的实部就是 $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$. 为此,先求 $e^{xe^{i\alpha}}$:

$$e^{xe^{i\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(xe^{i\alpha})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}e^{in\alpha}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

比较上式两端的实部，即得

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n$$

$$(|x|<+\infty).$$

比较虚部，还可得到

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!}x^n$$

$$(|x|<+\infty).$$

首先展开导函数，然后用逐项积分的方法以求下列函数的幂级数展开式.

**2869.** $f(x)=\operatorname{arctg}x$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

**解** $\operatorname{arctg}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

这里逐项积分的条件是满足的. 事实上，当 $t\in[0,x]$ 且 $|x|<1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$ 是一致收敛的，并且各项均连续. 以下各题类似，不再一一说明. 上述级数的收敛区间为 $|x|<1$，当 $|x|=1$ 时，为交错级数，且满足莱布尼兹判别法的条件，故在端点 $x=\pm1$ 处，级数均收敛. 因此，级数的收敛域为 $|x|\leqslant1$，在其上展式成立.

令 $x=1$，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

2870. $f(x)=\arcsin x$.

**解** $$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，利用2604题的结果，由于$\frac{p}{2}+q=\frac{1}{2}+1>1$，故级数收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant1$，在其上展式成立.

2871. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

**解** $$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$=\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，级数为绝对收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant1$，在其上展式成立.

2872. $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

**解** $$\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)=\int_0^x\frac{2t-2\cos\alpha}{1-2t\cos\alpha+t^2}dt$$

$$=-2\int_0^x\frac{1}{t}\cdot\frac{t\cos\alpha-t^2}{1-2t\cos\alpha+t^2}dt$$

$$=-2\int_0^x\left(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\alpha\right)dt^{*)}$$

$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n.$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，由 2698 题知，对于$0<\alpha<\pi$，级数收敛. 因此，当$0<\alpha<\pi$时，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$. 但当$\alpha=0$且$x=1$时，级数发散；当$\alpha=0$且$x=-1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=-1$时，级数发散.

*） 利用 2863 题的结果.

**2873.** 利用各种方法，求下列函数展为幂级数的展开式：

(а)$f(x)=(1+x)\ln(1+x)$；

(б)$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$；

(в)$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$；

(г)$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$；

(д)$f(x)=x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$；

(е)$f(x)=\arccos(1-2x^2)$；

(ж)$f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$；

(з)$f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

**解** (а)$f(x)=(1+x)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ (|x|<1),$$

当$|x|=1$时，级数收敛. 因此，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$.

$$=\int_0^x\left[\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t^4}{4}\right)^n\right]dt$$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{t^{2n}}{2^n}\right]dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\quad(|x|<\sqrt{2}).$$

当$|x|=\sqrt{2}$时，级数为

$$\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2n+1}$$

及
$$-\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{2n+1},$$

它们均由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+1}\text{ 及 }\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4n+3}$$

逐项相加并分别乘以常数$\sqrt{2}$及$-\sqrt{2}$而得，故它们收敛. 因此，原级数的收敛域为$|x|\leqslant\sqrt{2}$.

$$(\text{п})f(x)=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ {}^{*)}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

$$(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$ 收敛. 因此，级数的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

*)利用 2869 题的结果.

(e)由于

$$f'(x)=[\arccos(1-2x^2)]'=\frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

及 $f(0)=0$，故

$$\arccos(1-2x^2)=2\operatorname{sgn}x\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=2\operatorname{sgn}x\cdot\int_0^x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right]dt$$

$$=2\operatorname{sgn}x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]$$

$$=2|x|\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right]$$

$$(|x|<1). \qquad (1)$$

当 $|x|=1$ 时，级数为

$$2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right].$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5n}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}>1,$$

即知它是收敛的. 因此，级数(1)的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

$$(\text{ж})f(x)=x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]^{*)}$$

$$+\left[1-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法：

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2+11n}{(2n+1)^2}=\frac{5}{2}>1,$$

即知它是收敛的．因此，原级数的收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

*）利用 2870 题的结果．

$$(3)\ f(x)=x\cdot\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]^{*)}-\left[1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=-1+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\quad(|x|\leqslant 1).$$

*）　利用 2871 题的结果．

**2874.** 利用展开式

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

的唯一性，求下列函数的 $n$ 阶导函数：

(a) $f(x)=e^{x^2}$；　　(6)⁺ $f(x)=e^{\frac{a}{x}}$；

(в)$^+$ $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

**解** (a) $f(x+h)-f(x)=e^{(x+h)^2}-e^{x^2}$

$$=e^{x^2}(e^{2xh+h^2}-1)$$

$$=e^{x^2}\Big[(2xh+h^2)+\frac{1}{2!}(2xh+h^2)^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}(2xh+h^2)^n+\cdots\Big],$$

其中 $h^n$ 的系数为

$$e^{x^2}\Big[\frac{1}{n!}(2x)^n+\frac{1}{(n-1)!}C_{n-1}^1(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{1}{(n-2)!}C_{n-2}^2(2x)^{n-4}+\cdots\Big]$$

$$=\frac{e^{x^2}}{n!}\Big[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\Big].$$

将 $f(x+h)-f(x)$ 的展开式中 $h^n$ 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与之比较，即得

$$(e^{x^2})^{(n)}=e^{x^2}\Big[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\cdots\Big].$$

(б) $f(x+h)-f(x)=e^{\frac{a}{x+h}}-e^{\frac{a}{x}}$

$$=e^{\frac{a}{x}}\left(e^{-\frac{ah}{x(x+h)}}-1\right)=e^{\frac{a}{x}}\left(e^{\frac{-a\frac{h}{x^2}}{1+\frac{h}{x}}}-1\right)$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\Big[e^{-\frac{ah}{x^2}+\frac{ah^2}{x^3}-\frac{ah^3}{x^4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}+\cdots}-1\Big]$$

$$=e^{\frac{a}{x}}\Big\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}}\Big]^m\Big\}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!x^m} \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1+1} \left( \frac{h}{x} \right)^{k_1+1}$$

$$\cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_2+1} \left( \frac{h}{x} \right)^{k_2+1} \cdots$$

$$\cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_m+1} \left( \frac{h}{x} \right)^{k_m+1}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!x^m}$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{k_1+\cdots+k_m+m}$$

$$\cdot \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+\cdots+k_m+m}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^m a^m}{m!x^m} \left( \frac{h}{x} \right)^m \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left( \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \right) (-1)^s \left( \frac{h}{x} \right)^s \right]$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^m a^m}{m!x^m} \left( \frac{h}{x} \right)^m \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+m-1}^{s} (-1)^s \left( \frac{h}{x} \right)^s \right]^{*)}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+s} a^m}{m!x^m} \left( \frac{h}{x} \right)^{m+s} C_{s+m-1}^{s}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{s+m=n \\ s\geqslant 0, m\geqslant 1}} \frac{(-1)^n a^m}{m!x^m} \left( \frac{h}{x} \right)^n C_{n-1}^{s}$$

$$= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \left( \frac{h}{x} \right)^n \sum_{\substack{s+m=n \\ s\geqslant 0, m\geqslant 1}} C_{n-1}^{s} x^{n-m} \frac{a^m}{m!}$$

$$= e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^{2n}}h^n\sum_{s=0}^{n-1}C_{n-1}^{s}\frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!}$$

$$= e^{\frac{a}{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}A_n h^n,$$

其中

$$A_n = \frac{(-1)^n}{x^{2n}}\sum_{s=0}^{n-1}s!C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s}x^s.$$

于是，比较 $h^n$ 的系数，即得

$$(e^{\frac{a}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^l}{x^{2n}}e^{\frac{a}{x}}\sum_{s=0}^{n-1}s!C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s}x^s$$

$$= \frac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{\frac{a}{x}}\Big[a^n + \frac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)\cdot(n-1)(n-2)}{2!}a^{n-2}x^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots\Big].$$

*）其中 $\sum\limits_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 0,\cdots,k_m\geqslant 0}} 1 = C_{s+m-1}^{s}$ 推导如下：

令 $|t| < 1$，一方面由 $\frac{1}{1-t} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}t^k$ 得

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m = \sum_{k_1=0}^{\infty}t^{k_1}\sum_{t^{k_2}=0}^{\infty}k_2\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}t^{k_m}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}t^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1\Big)t^s$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty}P_s t^s,$$

其中 $P_s=\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}1$. 另一方面，又由

$$\left(\frac{1}{1-t}\right)^m=(1-t)^{-m}$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!}(-1)^s t^s$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{2s}\frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!}t^s$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}C_{m+s-1}^{s}t^s,$$

由幂级数展开的唯一性，即知 $P_s=C_{m+s-1}^{s}$.

(B)根据

$$\text{arc tg}x+\text{arc tg}y=\text{arc tg}\,\frac{x+y}{1-xy},$$

令 $y=\dfrac{\dfrac{h}{1+x^2}}{1+\dfrac{x}{1+x^2}h}$，就有 $\dfrac{x+y}{1-xy}=x+h$. 于是

$$f(x+h)-f(x)=\text{arc tg}(x+h)-\text{arc tg}x$$

$$=\text{arc tg}\,\frac{x+y}{1-xy}-\text{arc tg}x=\text{arc tg}y$$

$$=\text{arc tg}\left[\frac{h}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x}{1+x^2}h}\right].$$

由 2869 题的结果知，当 $|y|\leqslant 1$ 时，有

$$\text{arc tg}y=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{y^{2m+1}}{2m+1}.$$

而当 $h$ 很小(且 $|x|\leqslant 1$) 时，有

$$y = \frac{h}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{1+x^2}h}$$

$$= \frac{h}{1+x^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k.$$

于是

$$f(x+h) - f(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{2m+1}\left[\frac{h}{1+x^2}\right.$$

$$\left.\cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{1+x^2}h\right)^k\right]^m$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m$$

$$\cdot \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$\cdot \left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^m$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{\infty}\Big(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1\Big)(-1)^s\left(\frac{xh}{1+x^2}\right)^s$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^m \frac{1}{2m+1}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s} x^s$$

$$\cdot (-1)^s C_{m+s-1}^s$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{m+s=n \\ m\geqslant 1, s\geqslant 0}}(-1)^{m+s}\left(\frac{h}{1+x^2}\right)^{m+s}$$

$$\cdot \frac{x^s}{2m+1}C_{m+s-1}^s$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{1+x^2}\right)^n A_n,$$

其中

$$A_n = \sum_{\substack{m+s=n \\ m\geqslant 1, s\geqslant 0}} \frac{x^s}{2m+1} C_{n-1}^s$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s (n = 1,2,\cdots).$$

因此，比较 $h^n$ 的系数，即得

$$(\operatorname{arc\,tg} x)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} A_n$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \left[\frac{1}{3}x^{n-1} + \frac{1}{5}(n-1)x^{n-2} + \cdots\right].$$

**2875.** 把函数

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$$

依二项式 $x+1$ 的正整数乘幂展开.

**解** $f(x) = -\ln[1+(x+1)^2]$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x+1)^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n},$$

收敛域为 $|x+1| \leqslant 1$ 或 $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

**2876.** 把函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

按变数 $x$ 的负乘幂展开成幂级数.

$$\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1},$$

当 $\left|\frac{x}{1+x}\right|<1$ 即当 $x>-\frac{1}{2}$ 时，级数收敛. 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，由2689题的结果知，它条件收敛. 因此，级数的收敛域为 $x\geqslant-\frac{1}{2}$.

**2879.** 设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!},$$

直接证明

$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

**证** $f(x)f(y)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\frac{x^{n_1}}{(n_1)!}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{y^{n_2}}{(n_2)!}$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\frac{1}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+n_2=n}\frac{1}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{n_1+n_2=n}\frac{n!}{(n_1)!(n_2)!}x^{n_1}y^{n_2}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{n_1=0}^{\infty}C_n^{n_1}x^{n_1}y^{n-n_1}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^{n}=f(x+y).$$

上述级数在 $|x|<+\infty$ 及 $|y|<+\infty$ 上绝对收敛，故

重新组合是允许的.

事实上,$f(x)=e^x$,等式

$$f(x)f(y)=f(x+y)$$

即为指数函数的特征.

2880. 假如我们定义

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

及

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

证明:(a)$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$;

(б)$\sin^2x+\cos^2x=1$.

证　由于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式在 $|x|<+\infty$ 内绝对收敛,故级数相乘或相加、减均仍绝对收敛,且可重新组合.因此,以下的级数运算都是合理的.

(a) $\sin x\cos x$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}\frac{x^{2n_1+1}}{(2n_1+1)!}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_2}\frac{x^{2n_2}}{(2n_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}(-1)^{n_1+n_2}\cdot\frac{x^{2n_1+2n_2+1}}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{(-1)^n x^{2n+1}$$

$$\cdot \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}\Bigg)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A_n x^{2n+1},$$

其中

$$A_n = \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$= \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2)=2n+1 \\ n_1\geqslant 0, n_2\geqslant 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1 \\ k_1\text{—奇数} \\ k_2\text{—偶数}}} \frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{k_1\text{奇}, k_2\text{偶}} + \sum_{k_1\text{偶}, k_2\text{奇}}\Bigg)$$

$$= \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} 2^{2n+1}.$$

从而得

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x.$$

(6) $\sin^2 x + \cos^2 x$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$+\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2}\frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(-1)^n x^{2n+2}$$

$$\cdot\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\Big\}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{(-1)^m x^{2m}$$

$$\cdot\sum_{\substack{k_1+k_2=m\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}\Big]$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}+\sum_{n=0}^{\infty}$$

$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n+2}A_n,$$

其中

$$A_n=\sum_{\substack{k_1+k_2=n+1\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$-\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2\\ k_1\geqslant 0,k_2\geqslant 0}}\frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!}$$

$$-\sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}$$

$$\left.\frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{k'=0,2,\cdots,2n+2} C_{2n+2}^{k'}\right.$$

$$\left.-\sum_{l'=1,3,\cdots,2n+1} C_{2n+2}^{l'}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\left[\sum_{s=0,2,\cdots,2n+2}(-1)^s C_{2n+2}^{s}\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1,3,\cdots,2n+1}(-1)^s C_{2n+2}^{s}\right]$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}\sum_{s=0}^{2n+2}(-1)^s C_{2n+2}^{s}$$

$$=\frac{1}{(2n+2)!}[1+(-1)]^{2n+2}$$

$$=0\ (n=0,1,2,\cdots).$$

因而得

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1(|x|<+\infty).$$

**2881.** 写出函数 $f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$ 展为幂级数的展开式中之若干项.

**解** $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^{-1}$

$$=1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^3}{4}+\cdots\right)^2$$

$$-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{24}-\cdots(|x|<1).$$

对于幂级数进行相应的运算以求下列函数展成幂级数

的展开式：

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

解 $$f(x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$
$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]x^n$$
$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n(|x|<+\infty).$$

2883. $f(x)=(1-x)^2\operatorname{ch}\sqrt{x}$.

解 当 $x\geqslant 0$ 时，$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}+e^{-\sqrt{x}}}{2}$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right]x^{\frac{n}{2}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!};$$

当 $x<0$ 时，易知 $\operatorname{ch}\sqrt{x}=\cos\sqrt{|x|}$，

从而
$$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!},$$

故 $$\operatorname{ch}\sqrt{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}(|x|<+\infty).$$

从而
$$f(x)=(1-2x+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$$
$$=1-\frac{3}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-4)!}\right]x^n(|x|<+\infty).$$

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

**解** $f(x)=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\Big]x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{n+1}+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{n+1}\Big]x^{n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(|x|<1).$$

当 $x=-1$ 时,级数为

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

由于

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}>\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2}\quad(n=2,3,\cdots),$$

并且有

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}=\frac{C+\ln n+\varepsilon_n{}^{*)}}{n+1}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故它是收敛的.

当 $x=1$ 时，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n+1}$ 发散且原级数为正项级数，故 $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}$ 也发散.

因此，级数

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

的收敛域为 $-1\leqslant x<1$.

*）利用 146 题的结果.

2885. $f(x)=(1+x^2)\text{arc tg}\,x$.

**解** $f(x)=(1+x^2)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ *）

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+1}$$

$$=x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$$

$$(|x|\leqslant 1).$$

*）利用 2869 题的结果.

2886. $f(x)=e^x\cos x$.

**解** $e^x\cos x$ 为 $e^x(\cos x+i\sin x)$ 的实部. 由于

$$e^x(\cos x+i\sin x)=e^x\cdot e^{ix}=e^{(1+i)x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+i)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

比较上式两端的实部，即得

$$e^x\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

2887. $f(x)=e^x\sin x$.

**解** 利用 2886 题的等式，并比较此等式两端的虚部，即得

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty).$$

2888. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

**解**
$$f(x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}(-1)^{n_1}x^{n_1}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_2}\frac{x^{n_2+1}}{n_2+1}$$

$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(-1)^{n_1+n_2}\frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n x^{n+1}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geqslant 0,n_2\geqslant 0}}\frac{1}{n_2+1}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n\right]$$

$$(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，通项的绝对值$\geqslant 1$，显然发散. 因此，级数的收敛域为 $|x|<1$.

2889. $f(x)=(\operatorname{arc\,tg} x)^2$.

**解**
$$f(x)=\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\right)^{2*)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{(2n-1)\cdot 1}+\frac{1}{(2n-3)\cdot 3}\right.$$

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n=2$$

或 $$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n^2a_nx^n=2,$$

也即

$$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n]x^n=2$$
$$(-1<x<1).$$

比较上式 $x$ 的同次幂的系数，得

$$a_2=1, a_3=0,$$
$$a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \quad (n\geqslant 2).$$

从而可得

$$a_{2k+1}=0,$$
$$a_{2k+2}=\frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!}=\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}$$
$$(k=0,1,2,\cdots).$$

于是

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k+2}(-1<x<1).$$

从而得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k}(-1<x<1).$$

显然右端的幂级数当 $x=\pm1$ 时均收敛，而左端的函数当 $x=\pm1$ 时连续，故由幂级数的亚伯耳定理知，上述展式当 $x=1$ 及 $x=-1$ 时也成立.

写出下列函数按变数 $x$ 的正乘幂展开成幂级数的展开式(异于零)的前三项：

2891. $f(x)=\mathrm{tg}x$.

**解** 方法一：

直接应用台劳公式，先求导数，有

$f(x)=\mathrm{tg}x$, $\qquad f(0)=0$;

$f'(x)=\sec x$, $\qquad f'(0)=1$;

$f''(x)=2\sec^2 x\,\mathrm{tg}x$, $f''(0)=0$;

$f'''(x)=2\sec^4 x+4\sec^2 x\,\mathrm{tg}^2 x$, $f'''(0)=2$;

$$f^{(4)}(x)=8\sec^4 x\,\mathrm{tg}x+8\sec^2 x\,\mathrm{tg}^3 x+8\sec^4 x\,\mathrm{tg}x,$$

$f^{(4)}(0)=0$;

$$f^{(5)}(x)=32\sec^4 x\,\mathrm{tg}^2 x+8\sec^6 x+16\sec^2 x\,\mathrm{tg}^4 x+24\sec^4 x\,\mathrm{tg}^2 x+32\sec^4 x\,\mathrm{tg}^2 x+8\sec^6 x,$$

$f^{(5)}(0)=16$;

……

于是，

$$f(x)=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\cdots=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots \qquad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

方法二：

当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，记 $\xi=1-\cos x$，则 $|\xi|<1$，有

$$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x\cdot\frac{1}{1-\xi}=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\xi^m$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1} \\
&\qquad \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right]^{m} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1} \\
&\qquad \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}(-1)^{k_1+\cdots+k_m+m} \\
&\qquad \cdot\frac{x^{2(k_1+\cdots+k_m)}}{(2k_1)!\cdots(2k_m)!} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&\qquad + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}(-1)^{s+l+m-1} \\
&\qquad \cdot\frac{x^{2s+2l-1}}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \\
&\qquad (-1)^{n-1}x^{2n-1}\cdot\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 1}}\ \sum_{1\leqslant m\leqslant s}\ \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}} \\
&\qquad (-1)^{m}\frac{1}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}A_n x^{2n-1},
\end{aligned}
$$

其中 $A_1 = 1$，而当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$
A_n = (-1)^{n-1}\Big[\frac{1}{(2n-1)!}
$$

$$+\sum_{\substack{l+s=n\\ l\geqslant 1}}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}\frac{(-1)^m}{(2l-1)!(2k_1)!\cdots(2k_m)!}\Big\}.$$

例如，当 $n=2(l=1,s=1,m=1,k_1=1)$时，

得 $A_2=\frac{1}{3}$；当 $n=3(l=2,s=1,m=1,k_1=1$；

$l=1,s=2,m=1,k_1=2$；$l=1,s=2,m=2$，

$k_1=1,k_2=1)$时，得 $A_3=\frac{1}{5!}+(-1)\frac{1}{3!\ 2!}$

$+(-1)\frac{1}{4!}+\frac{1}{2!\ 2!}=\frac{2}{15}$，等等. 于是有

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots\qquad\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

2892. $f(x)=\operatorname{th}x$.

**解** 运用幂级数展开式的唯一性定理，为求展开式可以考虑在 $x=0$ 点附近作幂级数展开. 注意当 $|x|$ 很小，且幂级数中常数项为零时，其收敛的和是很小的. 于是，以下的写法是可以的，取其前三项，有

$$f(x)=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots}{1+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)}$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$\cdot\Big[1-\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2-\cdots\Big]$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{5x^4}{24}+\cdots\right)$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right).$$

如果详细一些，可进一步叙述如下：

首先，可有一特殊的幂级数

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots.$$

如若 $|x|<\rho$ 且 $\dfrac{\dfrac{\rho}{2}}{1-\dfrac{\rho}{3}}=1$，例如取 $\rho=\dfrac{6}{5}=1.2$ 时，

有 $\dfrac{\rho}{2!}+\dfrac{\rho^2}{3!}+\cdots\leqslant 1$，此时得

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots$$

$$(|x|<1.2).$$

易见 $A_3=0,A_5=0,A_7=0,\cdots$. 于是，上式

可改写为

$$\frac{x}{e^x-1}=1-\frac{x}{2}+B_1\cdot\frac{x^2}{2!}-B_2\cdot\frac{x^4}{4!}$$

$$+B_3\cdot\frac{x^6}{6!}-\cdots, \tag{1}$$

其中 $B_1,B_2,B_3,\cdots$ 为伯努里(Bernoulli)常数 * )，

有

$B_1=\dfrac{1}{6},B_2=\dfrac{1}{30},B_3=\dfrac{1}{42},$

$B_4=\dfrac{1}{30},B_5=\dfrac{5}{66},\cdots.$

由

$$x\operatorname{cth}\frac{x}{2}=x\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2x}{e^x-1}+x$$

及(1)式，即得

$$\frac{x}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}=1+B_1\frac{x^2}{2!}-B_2\frac{x^4}{4!}+B_3\frac{x^6}{6!}-\cdots.$$

于是

$$x\operatorname{cth}x=1+B_1\frac{2^2x^2}{2!}-B_2\frac{2^4x^4}{4!}+B_3\frac{2^6x^6}{6!}-\cdots.$$

若 $x\neq 0$，则

$$\operatorname{cth}x=\frac{1}{x}+B_1\frac{2^2x}{2!}-B_2\frac{2^4x^3}{4!}+B_3\frac{2^6x^5}{6!}-\cdots. \tag{2}$$

注意到

$$\operatorname{th}x=2\operatorname{cth}2x-\operatorname{cth}x$$

及当 $x=0$ 时，$\operatorname{th}x=0$，由(2)式即有

$$\begin{aligned}\operatorname{th}x&=\frac{B_1}{2\,!}(2^4-2^2)x-\frac{B_2}{4\,!}(2^8-2^4)x^3+\frac{B_3}{6\,!}(2^{12}-2^6)x^5-\cdots\\&=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\cdots.\end{aligned} \tag{3}$$

还可指出的是，它的系数与 $\operatorname{tg}x$ 展开式相应项的系数的绝对值是相同的，两者相应各系数只是符号上有交错变异而已(可参看本题解末加注的 Bromwich 所著一书的相应章节)，而 $\operatorname{tg}x$ 的幂级数展开式当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时收敛，故上述的级数(3)当 $|x|<\frac{\pi}{2}$ 时收敛.

*)参看 Bromwich 著 An introduction to the theory of infinite series 一书第十一章 100 款.

2893. $f(x)=\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}$.

**解** 与 2892 题的想法一样，可以考虑 $x\neq 0$ 且 $|x|$ 很小的情形．于是有

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\cdot\left[1+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)+\left(\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}-\cdots\right)^2+\cdots\right]-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6+\cdots\right)-1\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\cdots$$

$$(0<|x|<\pi).$$

一般说来，为求通项可作如下进一步的讨论：

考虑当 $x\neq 0$ 时，$g(x)=xf(x)=x\operatorname{ctg} x-1$，而当 $|x|<\pi$时，有

$$g(x)=x\operatorname{ctg} x-1=\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}-1=\frac{\cos x}{1-\xi}-1,$$

其中

$$\xi=1-\frac{\sin x}{x},$$

注意到$|\sin x|<|x|$,故$|\xi|<1$. 因而

$$\begin{aligned}
g(x) &= \cos x \cdot \sum_{m=0}^{\infty}\xi^m - 1 \\
&= \Big[1+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\Big]\Big(1+\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m\Big)-1 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\xi^m+\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!} \\
&\quad +\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\xi^m.
\end{aligned}$$

由于

$$\xi=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k}}{(2k+1)!},$$

故有

$$\begin{aligned}
\xi^m &= \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=1}^{\infty}(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m+m} \\
&\quad \cdot\frac{x^{2(k_1+k_2+\cdots+k_m)}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)!\cdots(2k_m+1)!} \\
&= \sum_{s=m}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_m=s}(-1)^{s+m} \\
&\quad \cdot\frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\xi^m &= \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant1,\cdots,k_m\geqslant1}}(-1)^{s+m} \\
&\quad \cdot\frac{x^{2s}}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s A_s x^{2s},$$

其中

$$A_s = \sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}} \frac{(-1)^m}{(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}$$

$$(s=1,2,\cdots).$$

又有

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}\xi^m$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=m}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}(-1)^{s+m+l}$$

$$\cdot\frac{x^{2s+2l}}{(2l)!(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n B_n x^{2n},$$

其中

$$B_n = \sum_{\substack{s+l=n\\ s\geqslant 1,l\geqslant 1}}\sum_{1\leqslant m\leqslant s}\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s\\ k_1\geqslant 1,\cdots,k_m\geqslant 1}}$$

$$\frac{(-1)^m}{(2l)!(2k_1+1)!\cdots(2k_m+1)!}\quad(n=2,3,\cdots)$$

于是，

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s A_s x^{2s} + \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{x^{2l}}{(2l)!}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n B_n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}P_n x^{2n},$$

$$1 = \cos x \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s+k=n} (-1)^k x^{2(k+s)} \frac{E_s}{(2k)!(2s)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{s+k=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \right] x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}.$$

根据幂级数展开式的唯一性，就有 $A_0 = E_0 = 1$，而 $A_n = 0(n = 1,2,\cdots)$ 其中

$$A_n = \sum_{k+s=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},$$

故得递推关系

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0(n = 1,2,\cdots)$$

例如已知 $E_0$，由上式令 $n=1$，即得 $E_1 - E_0 = 0$，从而 $E_1 = E_0 = 1$. 由 $E_0, E_1$，令 $n=2$，又可推出 $E_2, \cdots$，等等. 一般说来，由 $E_0, E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}$，从上式可推出 $E_n$.

2895. 将函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \qquad (|x|<1)$$

展开成幂级数.

**解** 只要 $x^2 + 2|tx| < 1$，函数 $f(x)$ 就有展开的可能性. 记 $x^n$ 的系数为 $P_n(t)$，则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}=1+P_1(t)x+P_2(t)x^2+\cdots+P_n(t)x^n+\cdots. \tag{1}$$

下面我们只要确定 $P_n(t)$ 即可．为此，对(1)式两端同时对 $x$ 求导数，得

$$\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}}=P_1(t)+2P_2(t)x+\cdots+nP_n(t)x^{n-1}+\cdots.$$

把上式与(1)式比较，易得

$$(1-2tx+x^2)(P_1+2P_2x+\cdots+nP_nx^{n-1})$$
$$=(t-x)(1+P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n).$$

比较上式两端 $x$ 的同次幂的系数，得

$$P_1(t)=t,$$
$$2P_2(t)-2tP_1(t)=tP_1(t)-1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)P_{n+1}(t)-2ntP_n(t)+(n-1)P_{n-1}(t)$$
$$=tP_n(t)-P_{n-1}(t).$$

由此得

$$P_1(t)=t,$$
$$P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{n+1}(t)=\frac{2n+1}{n+1}tP_n(t)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \tag{2}$$

例如，取 $n=2$，则由 $P_1(t)$ 及 $P_2(t)$ 可推得

$$P_3(t)=\frac{5}{3}t\cdot\frac{3t^2-1}{2}-\frac{2}{3}t$$
$$=\frac{5\cdot 3}{3\cdot 2}t^3-\frac{3}{2}t$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5}{3!}\left\{t^3-\frac{3\cdot2}{2(2\cdot3-1)}t\right\}.$$

一般说来，由(2)式用数学归纳法可递推得

$$P_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left\{t^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}t^{n-2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}t^{n-4}-\cdots\right\}$$

($n\geqslant1$，勒襄德多项式).

2896. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 写出函数 $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

**解** $F(x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}a_{n_1}x^{n_1}\cdot\sum_{n_2=0}^{\infty}x^{n_2}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\n_1\geqslant0,n_2\geqslant0}}a_{n_1}\Big)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_k\Big)x^n\quad(|x|<1).$$

2897. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有收敛半径 $R_1$，而级数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 有收敛半径 $R_2$，则级数

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；　　(6) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$

的收敛半径 $R$ 是怎样的?

**解** (a)记 $A_n=a_n+b_n$，则有

$$\sqrt[n]{|A_n|}=\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leqslant\sqrt[n]{|a_n|+|b_n|}$$

$$\leqslant\sqrt[n]{2\max(|a_n|,|b_n|)}$$

$$=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{\max(|a_n|,|b_n|)}$$

$$= \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}).$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$，故有

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n|}$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left\{ \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{(|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \right\}$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty} \{\max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|})\}$$

$$= \max\{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}\}$$

$$= \max\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right),$$

从而得

$$R \geqslant \frac{1}{\max\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right)} = \min(R_1, R_2).$$

(6)记 $B_n = a_n b_n$，则有

$$\sqrt[n]{|B_n|} = \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|}.$$

于是

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|B_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|}\}$$

$$\leqslant \{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\} \cdot \{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}\}$$

$$= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 R_2},$$

故得

$$R \geqslant R_1 R_2.$$

**2898.** 设

$$l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \text{和} L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

证明幂级数的收敛半径 $R$ 满足下述不等式

$$l\leqslant R\leqslant L.$$

**证** 记 $l_1=\frac{1}{l}, L_1=\frac{1}{L}$. 注意 $l\geqslant 0, L\geqslant 0$. 若 $l=0$, 则记 $l_1=+\infty$; 若 $l=+\infty$, 则记 $l_1=0$. 对 $L$ 与 $L_1$ 也作同样规定. 易见 $L_1\leqslant l_1$. 任给 $\varepsilon>0$, 总可选 $\delta_1>0, \delta_2>0$, 使

$$\frac{1}{1+\delta_1}=1-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{1-\delta_2}=1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意对 $\delta_1, \delta_2$ 而言, 存在自然数 $m$, 使当 $n>m$ 时, 有

$$l\cdot(1-\delta_2)<\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|<L\cdot(1+\delta_1)$$

或

$$\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{1+\delta_1}<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n>m$ 时, 有

$$L_1\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<l_1\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

易见当 $n>m$ 时, 有

$$\frac{|a_n|}{|a_m|}=\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}$$
$$<\left[l_1\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{n-m}$$

或

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{1}$$

同理可得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{2}$$

注意到若 $A>0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}=1$，故存在充分大的 $n_0(>m)$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

及

$$\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}>1-\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式及(2)式，即得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<1+\varepsilon \text{ 及 } \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>1-\varepsilon.$$

于是有

$$L_1\cdot(1-\varepsilon)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant l_1\cdot(1+\varepsilon).$$

从而得

$$\frac{1}{l_1(1+\varepsilon)}\leqslant R\leqslant\frac{1}{L_1(1-\varepsilon)}\ ^{*)}.$$

即

$$\frac{l}{1+\varepsilon}\leqslant R\leqslant\frac{L}{1-\varepsilon}.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性，即知

$$l\leqslant R\leqslant L.$$

*）若 $L_1=+\infty$，即 $L=0$，此时显然有 $R=0$（级数除 $x_0=0$ 点收敛以外，对任一点 $x\neq x_0$ 均发散），故可设 $L_1<+\infty$.

2899. 证明：若函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 且

$$|n!a_n| < M(n = 1,2,\cdots),$$

其中 $M$ 是常数，则：1) $f(x)$ 在任一点 $a$ 可微分无限多次；2) 下述展开式成立

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

**证** 1) 由于 $|n!a_n| < M$，故有

$$|a_n| < \frac{M}{n!}(n = 1,2,\cdots).$$

设 $[-N,N]$ 是包含 $x_0$ 的任一有限区间．由于

$$|a_n(x-x_0)^n| < \frac{M}{n!}(2N)^n$$

及级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!}(2N)^n$ 收敛，故由外耳什特拉斯判别法知，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在包含 $x_0$ 的任意有限区间上一致收敛，即其收敛半径 $R = +\infty$．于是，此级数在任一点 $a \in (-\infty, +\infty)$ 可逐项微分任意多次．

2) 由 1) 段已证可知级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在任何点可逐项微分任意多次，故

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!}a_n(x-x_0)^{n-m}$$

$$(m = 1,2,\cdots).$$

今设 $|x-a| < R$（$R$ 为任意固定的正数），于是

$$|x-x_0| \leqslant |x-a| + |a-x_0|$$
$$< R + |a-x_0| = L,$$

故由假定知

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!}|a_n| \cdot L^{n-m}$$
$$\leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{M}{n!}L^{n-m}$$
$$= M\sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} = MP(m=1,2,\cdots),$$

其中$P = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} < +\infty$.

考虑余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

的拉格朗日形式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$
$$(0<\theta<1).$$

于是,当 $|x-a|<R$ 时,有

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{MP}{(n+1)!}R^{n+1}(n=1,2,\cdots).$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$收敛,故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

由此可知,当 $|x-a|<R$ 时,展式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

成立．再由 $R>0$ 的任意性即知，此展式对一切 $x(|x|<+\infty)$ 皆成立．证毕．

2900. 证明：若 1) $a_n\geqslant 0$ 及 2) 存在有

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S,$$

则
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S.$$

证　首先，如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$$

收敛，则根据亚伯耳定理可知，函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

在点 $x=R$ 处左连续．因此，

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=f(R)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S.$$

其次，我们证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$$

发散是不可能的．采用反证法，引出矛盾．事实上，根据 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=+\infty$ 知，对于任取的正整数 $A>S$，总存在正整数 $N$，使有

$$\sum_{n=0}^{N}a_nR^n>A>S.$$

由于

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} (|x| \leqslant 1).$$

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

**解** $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

$$= \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} (|x| < +\infty).$$

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

**解** $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^x \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} \quad (|x| \leqslant 1).$$

2905. $\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}$（写出四项）.

**解** 令 $0 < |t| < 1$，注意

$$\frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$$

$$= 1 - \xi,$$

其中 $\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$. 容易判断交错级数

$$\xi = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{t^m}{m+1}$$

当 $|t| < 1$ 时是收敛的，且其和有性质 $|\xi| < 1$. 于是有

$$\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}=\frac{1}{1-\xi}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n.$$

因而当 $|x|<1$ 时，得

$$\int_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)}=\int_0^x \frac{dt}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$$

$$=\int_0^x \frac{dt}{1-\xi}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\right)dt.$$

为求四项近似，取到 $t^3$ 为止足够，有

$$\xi^0=1,$$

$$\xi^1=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{3}+\frac{t^3}{4}-\cdots,$$

$$\xi^2=\frac{t^2}{4}-\frac{t^3}{3}+\cdots,$$

$$\xi^3=\frac{t^3}{8}-\cdots,$$

…………

于是，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n=1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}-\cdots.$$

从而当 $|x|<1$ 时，得原积分的前四项为

$$\int_0^x \frac{tdt}{\ln(1+t)}$$

$$=\int_0^x\left(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{12}+\frac{t^3}{24}\right)dt+O(x^5)$$

$$=x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}+O(x^5).$$

运用逐项微分法计算下列级数的和：

**2906.** $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots.$

**解** 设$F(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots$. 在收敛域$|x|<1$内逐项微分之，得

$$F'(x)=1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}.$$

注意$F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\quad(|x|<1).$$

于是，当$|x|<1$时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

2907. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$.

**解** 设$F(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$. 在收敛域$|x|\leqslant 1$内逐项微分之，得

$$F'(x)=1-x^2+x^4-\cdots=\frac{1}{1+x^2}.$$

注意$F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arc\,tg}x.$$

于是，当$|x|\leqslant 1$时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\operatorname{arc\,tg}x.$$

2908. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$.

**解** 设$F(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$. 在收敛域$|x|<+\infty$内逐项微分之，得

$$F'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

于是有

$$F(x)-F'(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{-x}, \qquad (1)$$

$$F(x)+F'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{x}. \qquad (2)$$

将(1)式和(2)式相加，最后得

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^3+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$$

$$(|x|<+\infty).$$

**2909.** $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots.$

**解** 设 $F(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$. 在收敛域 $|x|\leqslant 1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\cdots$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}[-\ln(1-x)]$$

$$(0<|x|<1).$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x F'(t)dt$$

$$=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x) \quad (0<|x|<1).$$

当 $x=0$ 时，级数收敛于零. 当 $x=1$ 时，级数收敛于 1. 当 $x=-1$ 时，级数收敛于 $1-2\ln 2$. 事实上，

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

$$=-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$=2\cdot\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots\right)+1$$
$$=1-2\ln 2.$$

于是，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$$
$$=\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x), & 当\ 0<|x|<1;\\ 0, & 当\ x=0;\\ 1-2\ln 2, & 当\ x=-1;\\ 1, & 当\ x=1.\end{cases}$$

**2910.** $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$.

**解** 设$F(x)=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$.
在收敛域内逐项微分之，得

$$F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}2x+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}3x^2+\cdots.$$

以 $1-x$ 乘上式两端，得

$$(1-x)F'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}F(x),$$

即

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{1}{2(1-x)}.$$

积分得

$$\ln F(x)=\ln\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

或

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+1$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1-x}}(|x|<1).$$

当 $x=1$ 时，应用拉阿伯判别法：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}<1,$$

因此，级数是发散的.

当 $x=-1$ 时，利用2689题的结果知，级数条件收敛. 于是，

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-x}}(-1\leqslant x<1).$$

运用逐项积分法计算下列级数的和：

**2911.** $x+2x^2+3x^3+\cdots$.

**解** 设 $F(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)dt=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots$$
$$=(x^2+x^3+x^4+\cdots)-(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots)$$
$$=x(1+x+x^2+\cdots)-\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)$$
$$=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\quad(|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\left(\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\right)'$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1).$$

当 $|x| = 1$ 时，由于级数的通项不趋于零，故它是发散的．

2912. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$.

**解** 设 $F(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{16}{5}x^5 + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(2 + \frac{1}{4}\right)x^4$$

$$- (3 + \frac{1}{5})x^5 + \cdots$$

$$= x + (-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots)$$

$$- x^3(1 - 2x + 3x^2 - \cdots)$$

$$= x - \ln(1+x) - x^3(x - x^2 + x^3 - \cdots)'$$

$$= x - \ln(1+x) - x^3 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)'$$

$$= x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \ (|x| < 1).$$

于是，

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$$

$$= \left[x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2}\right]'$$

$$= \frac{x(1-x)}{(1+x)^3} \quad (|x| < 1).$$

当 $|x| = 1$ 时．级数显然发散．

2913. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \cdots$.

**解**　设$F(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)dt = x^2+2x^3+3x^4+\cdots$$

$$= x(x+2x^2+3x^3+\cdots)$$

$$= x\cdot\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)} = \frac{x^2}{(1-x)^2}(|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n=\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)'$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^3}\quad(|x|<1).$$

当$|x|=1$时，级数显然发散.

*）　利用2911题的结果.

**2914.** 证明：级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

满足方程

$$y^{(4)}=y.$$

**证**　所给级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. 在收敛域内逐项微分之，得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!},\quad y''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!},$$

$$y'''=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!},\quad y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}.$$

于是，

$$y^{(4)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y.$$

**2915.** 证明：级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

满足方程

$$xy'' + y' - y = 0.$$

**证** 所给级数的收敛域为$(-\infty, +\infty)$. 在收敛域内逐项微分之，得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)!}$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}.$$

于是，

$$xy'' + y'$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{1}{n!(n+1)!}\right]x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y,$$

从而得

$$xy'' + y' - y = 0.$$

求在复数域内$(z = x + iy)$下列幂级数的收敛半径及收敛圆：

**2916.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}$.

**解** 记 $c_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. 由于

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 2,$$

故收敛半径 $R = 2$；收敛圆为

$$|z-1-i| < 2 \quad \text{即} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 < 2^2.$$

$$|z|<1 \quad \text{即 } x^2+y^2<1.$$

2920. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

**解** 记 $c_n=\dfrac{1}{n(1-e^{i\alpha})^n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}(1-e^{i\alpha})\right|$$

$$=|1-(\cos\alpha+i\sin\alpha)|=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|,$$

故收敛半径 $R=\left|2\sin\dfrac{\alpha}{2}\right|$;收敛圆为

$$|z-e^{i\alpha}|<\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|,$$

即

$$(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

2921. 利用牛顿的二项公式,近似地计算 $\sqrt[3]{9}$,并且估计当只取展开式的头三项时的误差.

**解** $\sqrt[3]{9}=2\left(1+\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{8^3}-\cdots\right).$$

当只取展开式的头三项时,误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{2\cdot 5}{3^3}\cdot\frac{1}{8^3}=\frac{10}{3^4\cdot 8^3}<0.001.$$

计算头三项,每一项取到小数点后四位,即得

$$\sqrt[3]{9}\doteq 2\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{3^2}\cdot\frac{1}{8^2}\right)$$

$\doteq 2.080.$

2922. 近似地计算：(a)arctg1.2；(б)$^{+}\sqrt[10]{1000}$；

(в)$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$；(г)ln1.25，并估计对应的误差.

**解** (a)利用

$$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy},$$

并设 $x=1,\dfrac{x+y}{1-xy}=1.2$，即得 $y=\dfrac{1}{11}$. 于是，

$$\operatorname{arctg}1.2=\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\frac{1}{11}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{11}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{11}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}\right)^5-\cdots.$$

若取头三项*)，则其误差

$$|R_3|<\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^5<10^{-5}.$$

计算头三项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\operatorname{arctg}1.2\doteq 0.87606.$$

(б) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{1024-24}=2(1-0.024)^{\frac{1}{10}}$

$$=2\left[1-\frac{0.024}{10}+\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)}{2!}(0.024)^2-\cdots\right].$$

若取头三项，注意到上述级数的各项递减，故其误差

$$|R_3|<2\cdot\frac{\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}-1\right)\left(\frac{1}{10}-2\right)}{3!}\cdot(0.024)^3[1+0.024+(0.024)^2+\cdots]$$

$$<10^{-6}.$$

计算头三项，每一项取到小数点后七位，即得

$$\sqrt[10]{1000}\doteq 1.995263.$$

(в) $\frac{1}{\sqrt{e}}=e^{-\frac{1}{2}}$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}$$

$$-\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{2^6}-\cdots.$$

若取头七项，则其误差

$$|R_7|<\frac{1}{7!\cdot 2^7}<10^{-5}.$$

计算头七项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\frac{1}{\sqrt{e}}\doteq 0.60653.$$

(г) $\ln 1.25=\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}-\frac{1}{4\cdot 4^4}$$

$$+\frac{1}{5\cdot 4^5}-\frac{1}{6\cdot 4^6}+\cdots.$$

若取头六项，则其误差

$$|R_6|<\frac{1}{7\cdot 4^7}<10^{-5}.$$

计算头六项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\ln 1.25\doteq 0.22314.$$

*) 本题并未注明取多少项以估计误差，因此，我们可任意选取．各小题均类似处理．

利用适当的展开式，计算下列函数准确到所指出的程度的值．

2923. $\sin 18^\circ$，准确到 $10^{-5}$.

**解** $\sin 18^\circ=\sin\frac{\pi}{10}$

$$=\frac{\pi}{10}-\frac{\pi^3}{3!\,10^3}+\frac{\pi^5}{5!\,10^5}-\cdots.$$

上述级数为交错级数，若取头 $n$ 项，则其误差

$$\Delta<\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}.$$

欲使 $\Delta<10^{-5}$，只要

$$\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^{2n+1}<10^{-5},$$

以 $n=3$ 代入上式即满足（$n=2$ 达不到要求的准确程度）. 计算头三项，每一项取到小数点后六位，即得

$$\sin 18^\circ \doteq 0.30902.$$

2924. $\cos 1^\circ$，准确到 $10^{-5}$.

**解** $\cos 1^\circ=\cos\frac{\pi}{180}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4-\cdots.$

取 $n=2$，即可保证 $\Delta<\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^4<10^{-6}$. 计算得

$$\cos 1^\circ \doteq 0.999848.$$

2925. $\operatorname{tg} 9^\circ$，准确到 $10^{-3}$.

**解** $\operatorname{tg} 9^\circ=\operatorname{tg}\frac{\pi}{20}$

$$=\frac{\pi}{20}+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3+\frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5+\cdots{}^{*)}.$$

若取头二项，考虑到上述级数的各项递减，则其误差

$$\Delta<\frac{2}{15}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5\left[1+\left(\frac{\pi}{20}\right)^2+\left(\frac{\pi}{20}\right)^4+\cdots\right]<10^{-3}.$$

取两项计算，每一项取到小数点后四位，计算得

$$\operatorname{tg} 9^\circ \doteq 0.158.$$

*）利用 2891 题的结果.

2926. $e$，准确到 $10^{-6}$.

**解** $e=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}$.

若取 $1+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}$ 作为 $e$ 的近似值，则其误差

$$\Delta=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}=\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdots m}$$

$$<\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{m-n}}=\frac{1}{n!n}.$$

欲 $\Delta<10^{-6}$，只要 $\frac{1}{n!n}<10^{-6}$，也即只要

$$n!n>10^{6}.$$

取 $n=9$ 即可．于是，当每项取到小数点后七位，即得

$$e\doteq 1+\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n!}\doteq 2.718282.$$

2927. $\ln 1.2$，准确到 $10^{-4}$.

**解** $\ln 1.2=\ln(1+0.2)$

$$=0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4+\cdots.$$

若取头 $n$ 项，则其误差

$$\Delta<\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}.$$

欲 $\Delta<10^{-4}$，只要 $\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}<10^{-4}$. 取 $n=4$ 即可保证

$$\Delta<\frac{1}{5}(0.2)^5<10^{-4}.$$

于是，当每项取到小数点后五位，即得

$$\ln 1.2\doteq 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4$$

$$\doteq 0.1823.$$

2928. 由等式

$$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2}$$

求数 $\pi$,准确到 $10^{-4}$.

**解** $\pi=6\arcsin\frac{1}{2}$

$$=6\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\right.$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\cdot\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots\right].$$

若取头六项,考虑到上述级数的各项递减,则其误差

$$\Delta<6\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10.12}$$

$$\cdot\frac{1}{13}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\right]$$

$$<10^{-4}.$$

取头六项计算,每一项取到小数点后五位,即得

$$\pi\doteq3.1416.$$

2929. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$$

计算数 $\pi$,准确到 0.001.

**解** 按题设,有

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼兹型的，所以在被加数与加数中，弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{4}{11\cdot 2^{11}}<0.0002,$$

$$0<\Delta_2<\frac{4}{9\cdot 3^9}<0.00002,$$

于是，总误差 $\Delta\leqslant\Delta_1+\Delta_2<0.001$. 计算保留下来的项近似到小数点后四位（末位由四舍五入而得），即可保证达到所需误差. 列成下表（括号中的正、负号指示校正数的符号）：

正　项

$$\frac{4}{2}=2.0000$$

$$\frac{4}{5\cdot 2^5}=0.0250$$

$$\frac{4}{9\cdot 2^9}=0.0009(-)$$

$$\frac{4}{3}=1.3333(+)$$

$$+)\ \frac{4}{5\cdot 3^5}=0.0033(-)$$

3.3625

0.2209

3.1416

负　项

$$\frac{4}{3\cdot 2^3}=0.1667(-)$$

$$\frac{4}{7\cdot 2^7}=0.0045(-)$$

$$\frac{4}{3\cdot 3^3}=0.0494(-)$$

$$+)\ \frac{4}{7\cdot 3^7}=0.0003(-)$$

0.2209

于是，

$$3.1415<\pi<3.1420.$$

因此，取 $\pi\doteq 3.142$ 即可准确到 0.001.

2930. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4}=4\text{arc tg}\frac{1}{5}-\text{arc tg}\frac{1}{239}$$

求数 $\pi$，准确到 $10^{-9}$.

**解** 在此，我们证明一下 2929 题及本题中的恒等式．如果，注意到反正切函数的加法公式

$$\text{arc tg}x+\text{arc tg}y$$
$$=\text{arc tg}\frac{x+y}{1-xy}\qquad\left(|x+y|<\frac{\pi}{2}\right),$$

并选取任何两个满足关系式

$$\frac{x+y}{1-xy}=1\quad 或\quad (1+x)(1+y)=2$$

的真分数作为 $x$，$y$，就有

$$\frac{\pi}{4}=\text{arc tg}x+\text{arc tg}y.$$

例如，令 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{3}$，即得

$$\frac{\pi}{4}=\text{arc tg}\frac{1}{2}+\text{arc tg}\frac{1}{3}.$$

这就是 2929 题中所出现的恒等式．

如果令 $x=\frac{1}{5}$，$\text{arc tg}\frac{1}{5}=\alpha$，则 $\text{tg}\alpha=\frac{1}{5}$，

$$\text{tg}2\alpha=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12},$$

$$\text{tg}4\alpha=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}\doteq 1.$$

可见，$4\alpha\doteq\frac{\pi}{4}$.

令 $\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4}$，则 $\operatorname{tg}\beta=\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}=\frac{1}{239}$.

于是，

$$\beta=\operatorname{arc\ tg}\frac{1}{239}.$$

由此，得

$$\frac{\pi}{4}=4\alpha-\beta=4\operatorname{arc\ tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\ tg}\frac{1}{239}$$

或

$$\begin{aligned}\pi&=16\operatorname{arc\ tg}\frac{1}{5}-4\operatorname{arc\ tg}\frac{1}{239}\\&=16\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7}\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9}-\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{5^{13}}-\cdots\right\}\\&\quad-4\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3}+\cdots\right\}.\end{aligned}$$

这就是本题中所出现的恒等式，它就是著名的马信(J. Machin)公式．

我们要依靠此式计算 $\pi$，准确到 $10^{-9}$，只要上面已写出的那些项就够了．事实上，这两个级数都是莱布尼兹型的，所以在被减数与减数中，弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{16}{15\cdot15^{15}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^9}$$

与

$$0<\Delta_2<\frac{4}{5\cdot239^5}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^9}$$

于是，总误差

$$\Delta\leqslant\Delta1+\Delta_2<\frac{1}{10^9}.$$

取 $\pi \doteq 3.141592653\cdots$所有写出的数字都是真确的。

2931. 利用公式

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\cdots\right)$$

求 ln2 和 ln3，准确到 $10^{-5}$.

**解** 当 $n=1$ 时，

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\cdots\right).$$

如取已写出的那些项计算 ln2，即知

$$0<\Delta<2\left(\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}}+\cdots\right)$$

$$<\frac{2}{11\cdot 3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^2}}<\frac{2}{10^6}.$$

计算到小数点后六位，并作出下表：

$$\frac{2}{3}=0.666667(-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 3^3}=0.024691(+)$$

$$\frac{2}{5\cdot 3^5}=0.001646(+)$$

$$\frac{2}{7\cdot 3^7}=0.000131(-)$$

$$+)\quad \frac{2}{9\cdot 3^9}=0.000011(+)$$

$$0.693146$$

$\therefore$ $0.693146<\ln 2<0.693148$.

于是，$\ln 2=0.69314\cdots$，并且所有写出来的五位数字都是真确的．如果，将第六位四舍五入，即得 $\ln 2\doteq 0.69315$，准确到 $10^{-5}$.

令 $n=2$，即得

$$\ln 3=\ln 2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}\right)+\cdots. \quad (1)$$

与 ln2 一样，取写出的诸项，计算到小数点后六位，并作出下表：

$$\frac{2}{5}=0.400000$$
$$\frac{2}{3\cdot 5^3}=0.005333(+)$$
$$\frac{2}{5\cdot 5^5}=0.000128$$
$$\frac{2}{7\cdot 5^7}=0.000004(-)$$
$$+)\ \frac{2}{9\cdot 5^9}=0.000000(+)$$
$$\overline{\qquad\qquad 0.405465}$$

于是，(1)式右端的级数的和为 0.40546…，并且写出来的五位数字都是真确的，如将第六位四舍五入，也得 0.40547.

最后，由(1)式得

$$\ln 3\doteq 0.693146\cdots+0.405465\cdots=1.09861\cdots,$$

并且所有写出来的数字都是真确的.

如果将第六位四舍五入，即得

$$\ln 3\doteq 0.69315+0.40546=1.09861,$$

它准确到 $10^{-5}$.

**2932.** 利用被积函数展成级数的展开式以计算下列积分之值，并准确到 0.001：

(a) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$； (б) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$；

(в) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$;　　(г) $\int_0^1 \cos x^2 dx$;

(д) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx$;　　(е) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

(ж) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;　　(з) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

(и) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$;

(к) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} dx$;　　(л) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx$;

(м) $\int_0^1 x^x dx$.

**解**　(а) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$$=\int_0^1 \left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5\cdot 2!}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

如取写出来的诸项，计算到小数点后四位，并作出下表：

$$
\begin{array}{lr}
1 & =1.0000 \\
\frac{1}{5\cdot 2!} & =0.1000 \\
+)\ \frac{1}{9\cdot 4!} & =0.0046(+) \\
\hline
 & 1.1046 \\
-) & 0.3571 \\
\hline
 & 0.7475 \\
\frac{1}{3} & =0.3333(+) \\
+)\ \frac{1}{7\cdot 3!} & =0.0238(+) \\
\hline
 & 0.3571
\end{array}
$$

于是，

$$0.7473<\int_{0}^{1}e^{-x^{2}}dx<0.7476,$$

即有$\int_{0}^{1}e^{-x^{2}}dx\doteq 0.747$,，准确到 0.001，并且所有写出来的数字都是真确的．

(б)$\int_{2}^{4}e^{\frac{1}{x}}dx$

$$=\int_{2}^{4}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!\ x^{2}}+\frac{1}{3!\ x^{3}}+\frac{1}{4!\ x^{2}}+\cdots\right)dx$$

$$=2+\ln 2+\frac{1}{2!\ \cdot 4}+\frac{3}{3!\ \cdot 32}+\frac{7}{4!\ \cdot 192}+\cdots$$

$$=2+0.\overset{(+)}{6}931+0.1250+0.015\overset{(+)}{6}+0.001\overset{(+)}{5}+\cdots$$

$$\doteq 2.8352\quad (0<\Delta<0.001).$$

于是，

$$\int_{2}^{4}e^{\frac{1}{x}}dx\doteq 2.835,$$

准确到 0.001.

(в)$\int_{0}^{2}\frac{\sin x}{x}dx$

$$=\int_{0}^{2}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\frac{x^{7}}{7!}+\cdots\right)dx$$

$$=2-\frac{2^{3}}{3\cdot 3!}+\frac{2^{5}}{5\cdot 5!}-\frac{2^{7}}{7\cdot 7!}+\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差 $0<\Delta<\frac{2^{9}}{9\cdot 9!}<\frac{1}{10^{3}}$. 列下表::

$$2\quad =2.0000$$

$$
\begin{array}{r}
+)\dfrac{2^5}{5\cdot 5!}=0.0533(+) \\
\hline
2.0533 \\
-)\quad 0.4480 \\
\hline
1.6053
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\dfrac{2^3}{3\cdot 3!}=0.4444(+) \\
+)\dfrac{2^7}{7\cdot 7!}=0.0036(+) \\
\hline
0.4480
\end{array}
$$

于是，

$$1.6051<\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx<1.6054,$$

即

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx \doteq 1.605,$$

并且所有写出的数字都是真确的.

(г) $\int_0^1 \cos x^2 dx$

$$=\int_0^1 \left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差 $0<\Delta<\frac{1}{13\cdot 6!}<\frac{1}{10^3}$. 列下表：

$$
\begin{array}{r}
1\quad =1.0000 \\
+)\quad \dfrac{1}{9.4}=0.0046(+) \\
\hline
1.0046 \\
-)\quad 0.1000 \\
\hline
0.9046
\end{array}
$$

$$\frac{1}{5\cdot 2!}=0.1000$$

$$\frac{1}{5\cdot 2!}\doteq 0.1000$$

所以

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.9046.$$

于是，

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.905,$$

准确到 0.001.

$$(\text{д})\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}x}{x}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{x}\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)dx$$

$$=1+\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}+\cdots,$$

如取写出的诸项计算积分值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{1}{7\cdot 7!}\left(1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^2}}<10^{-3}.$$

列下表：

$$1=1.0000$$

$$\frac{1}{3\cdot 3!}=0.0556(-)$$

$$+)\ \frac{1}{5\cdot 5!}=0.0017(+)$$

$$\overline{\qquad\qquad 1.0573}$$

于是，

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh}x}{x}dx \doteq 1.057,$$

准确到 0.001.

(e) 当 $x\geqslant 2$ 时,

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{x^3}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}$$

$$=\left(\frac{1}{x}\right)^3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{3n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3},$$

于是,

$$I=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{11}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}+\cdots.$$

取前两项的近似值就有

$$I=0.119+\theta\qquad(0<\theta<0.001).$$

或者用直接积分法:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$$

$$=\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3}\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_2^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{6}\ln 3-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{6}\ln 3$$

$$\doteq 0.119,$$

准确到 0.001.

(ж) $$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=1+\frac{x^2}{3}+\frac{4x^4}{3^2\cdot 2!}+\cdots,$$

故得

$$\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^5}+\cdots\doteq 0.337,$$

准确到 0.001.

(з) $$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}=\int_0^1(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int_0^1\left(1-\frac{1}{2}x^4+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^8+\cdots\right)dx$$

$$=1-\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1\cdot 3}{9\cdot 2^2\cdot 2!}-\cdots$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdots 45}{93\cdot 2^{23}\cdot 23!}+\cdots$$

$$=(1.0000+0.0417+0.0160+0.0090$$
$$+0.0060+0.0043+0.0033+0.0026$$
$$+0.0022+0.0018+0.0014+0.0012)$$
$$-(0.1000+0.0240+0.0117+0.0072$$
$$+0.0050+0.0037+0.0029+0.0024$$
$$+0.0020+0.0016+0.0013+0.0010)+\cdots$$

$$\doteq 0.927,$$

$$0<\Delta<\frac{1\cdot 3\cdots 47}{97\cdot 2^{24}\cdot 24!}<10^{-3}.$$

(и)注意，当 $10\leqslant x\leqslant 100$ 时，有

$$\ln(1+x)=\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^{n}.$$

于是，得

$$I=\int_{10}^{100}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$$

$$=\int_{10}^{100}\frac{\ln x}{x}dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_{10}^{100}x^{-n-1}dx$$

$$=\frac{3}{2}\ln^{2}10+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2}}\frac{1}{10^{n}}\left(1-\frac{1}{10^{n}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\ln^{2}10+\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{4\cdot 10^{2}}\left(1-\frac{1}{10^{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{9\cdot 10^{3}}\left(1-\frac{1}{10^{3}}\right)+\cdots$$

$$\doteq 8.040,$$

准确到 0.001.

(к) $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx$

$$=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{5}}{5}-\cdots\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2}\cdot 2^{3}}+\frac{1}{5^{2}\cdot 2^{5}}-\frac{1}{7^{2}\cdot 2^{7}}+\cdots,$$

如取前三项计算积分值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{1}{7^{2}\cdot 2^{7}}<\frac{1}{10^{3}}.$$

于是，

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}dx\doteq 0.487\text{（准确到 0.001）}.$$

2933. 求正弦曲线

$$y=\sin x \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi)$$

波之弧长，并准确到 0.01.

**解** 弧长 $s$ 为

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2!\cdot 2^2}\cos^4 x+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}\cos^6 x-\cdots\right)dx.$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x dx=\frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}\cdot n!\cdot n!}{}^{*)},$$

即有

$$s=2\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\cdot 2!}{2^4}-\frac{1}{2!\ 2^2}\cdot\frac{\pi\cdot 4!}{2^5\cdot 2!\ 2!}+\frac{1\cdot 3}{3!\ 2^3}\cdot\frac{\pi\cdot 6!}{2^7\cdot 3!\ 3!}-\cdots\right\}$$

$$=\pi\left(1+\frac{1}{4}-\frac{3}{64}+\frac{5}{256}-\cdots\right),$$

如取写出的诸项计算 $s$ 值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{3\cdot 5\cdot 2\pi}{4!\ 2^4}\cdot\frac{8!}{2^9\cdot 4!\ 4!}<\frac{1}{10^2}.$$

于是，

$$s\doteq 3.14(1+0.25-0.05+0.02)\doteq 3.83.$$

*） 利用 2290 题的结果，$m=0$.

2934. 椭圆之半轴为 $a=1$ 及 $b=\frac{1}{2}$，求椭圆的弧长，并准确到 0.01.

**解** 椭圆的参数方程为 $x=a\sin t$，$y=b\cos t$.

于是，

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt=\sqrt{a^2\cos^2t+b^2\sin^2t}dt$$
$$=a\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2t}dt,$$

其中 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率．从而得

$$s=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2t}dt$$
$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2t-\frac{1}{2!\ 2^2}\varepsilon^4\sin^4t\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot3}{3!\ \cdot2^3}\varepsilon^6\sin^6t-\cdots\right)dt$$
$$=4a\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cdot\frac{\pi\cdot2!}{2^3}-\frac{1}{2!\ 2^2}\varepsilon^4\cdot\frac{\pi\cdot4!}{2^5\cdot2!\ 2!}\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot3}{3!\ 2^3}\varepsilon^6\cdot\frac{\pi\cdot6!}{2^7\cdot3!\ 3!}-\cdots\right),$$

如取写出的前五项计算 $s$ 值，则其误差 $0<\Delta<10^{-3}$. 再以 $a,b$ 值代入，即得

$$s=2\pi\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}-\frac{3}{64}\cdot\frac{9}{16}-\frac{5}{256}\cdot\frac{27}{64}\right.$$
$$\left.-\frac{5\cdot27\cdot3}{256\cdot64\cdot4}-\cdots\right)$$
$$\doteq2\pi(1-0.188-0.026-0.008-0.003-\cdots)$$
$$\doteq4.84.$$

2935. 电线是扯在两根木桩上，两桩的距离为 $2l=20$ 米，电线成抛物线的形状．设凹处的矢 $h=40$ 厘米，计算电线的长度，并准确到 1 厘米．

**解** 先建立抛物线 $AOB$ 的方程．

取坐标系如图 5·2 所示，则方程的标准形式为

$x^2=2py.$

由于此抛物线过点 $B(10,0.4)$，所以

$$10^2=2p(0.4),\ p=125,$$

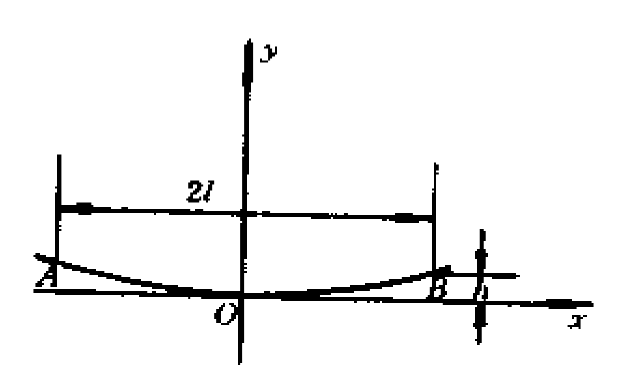



图 5.2

即

$$y=\frac{1}{250}x^2.$$

于是，所求的电线长为

$$\begin{aligned}
s&=2\int_0^{10}\sqrt{1+\left(\frac{1}{125}x\right)^2}dx\\
&=250\int_0^{\frac{2}{25}}\sqrt{1+t^2}dt\\
&=250\int_0^{\frac{2}{25}}(1+t^2)^{\frac{1}{2}}dt\\
&=250\int_0^{\frac{2}{25}}\left(1+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2!\ 2^2}t^4+\frac{1\cdot 3}{3!\ 2^3}t^6\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!\ 2^4}t^8+\cdots\right)dt\\
&=250\left(\frac{2}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{25^3}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{5\cdot 2!\ 2^2}\cdot\frac{2^5}{25^5}+\cdots\right),
\end{aligned}$$

如取前两项计算积分值，则其误差

$$0<\Delta<\frac{250}{5\cdot 2!\cdot 2^{2}}\cdot\frac{2^{5}}{25^{5}}<10^{-2}.$$

因此，

$$s=250\left(\frac{2}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{3}}{25^{3}}\right)$$

$$\doteq 20+0.02=20.02(\text{米}),$$

即所求的电线长为 20.02 米，准确到 0.01 米．

## §6. 福里叶级数

1°**展开定理** 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 内逐段连续并有逐段连续的导函数 $f'(x)$，并且一切不连续点 $\xi$ 是正则的 $\left(\text{即 } f(\xi)\frac{1}{2}[f(\xi-0)+f(\xi+0)]\right)$，则函数 $f(x)$ 在此区间上可用福里叶级数表出

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

式中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=0,1,2,\cdots) \tag{2}$$

及

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=1,2,\cdots). \tag{2'}$$

特别是：

(a)若函数 $f(x)$ 是偶函数，则有：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

式中 $a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=0,1,2,\cdots)$；

(б)若函数 $f(x)$ 是奇函数，则得：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\tag{4}$$

式中，$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\ (n=1,2,\cdots)$.

一个在区间$(0,l)$中有定义的并具有上面所提到的连续条件的函数$f(x)$，可在该区间内用公式(3)及公式(4)表示.

2°完全性条件　对于任一在区间$(-l,l)$上可积的且其平方也是可积的函数$f(x)$，作具有系数(2)，(2′)的级数(1)，则李雅甫诺夫等式成立：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx.$$

3°福里叶级数的积分法　在区间$(-l,l)$内按黎曼意义可积分的函数$f(x)$之福里叶级数(1)(即使是发散的)，可以在$(-l,l)$内逐项积分.

**2936.** 将函数

$$f(x)=\sin^4x$$

展开成福里叶级数.

**解**　在$[-\pi,\pi]$上，函数$f(x)=\sin^4x$展开成福里叶级数有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

由于

$$\sin^4x=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos4x}{2}$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{8}\cos4x,$$

故有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4xdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2x+\frac{1}{8}\cos4x\right)dx=\frac{3}{4};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^4 x\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}\cos nx-\frac{1}{2}\cos 2x\cos nx+\frac{1}{8}\cos 4x\cos nx\right)dx$$

$$=\begin{cases}0, n\neq 2, n\neq 4,\\ -\frac{1}{2}, n=2,\\ \frac{1}{8}, n=4;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\sin nx dx=0(n=1,2,\cdots).$$

又函数 $f(x)$ 处处连续，故其福里叶级数收敛于函数本身，即

$$f(x)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

注　由此题可以看出，周期为 $2\pi$ 的三角多项式的福里叶级数就是它本身，下面一题将给出一般的证明.

2937. 三角多项式

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)$$

的福里叶级数是怎样的？

**解**　$p_n(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数，不妨在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成福里叶级数. 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)dx=2\alpha_0;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p_n(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\cos nx dx$$

$$= \alpha_n;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_n(x)\sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\sin nx dx$$

$$= \beta_n.$$

于是，在$[-\pi,\pi]$上，有

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix),$$

即 $p_n(x)$ 的福里叶级数就是它本身.

2938. 将函数

$$f(x) = \operatorname{sgn}x(-\pi<x<\pi)$$

展开为福里叶级数.

绘出函数的图形及此函数之福里叶级数之若干部分和的图形.

利用展开式，求莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

的和.

**解** 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}x dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}x\cos nx dx=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sgn}x\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sgn}x\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n],$$

又函数 $f(x)$在$(-\pi,\pi)$上只有一个第一类间断点，故其福里叶级数收敛，且有

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

$f(x)$ 及其福里叶级数之若干部分和的图形如图 5.3 所示，其中画的是一项 $S_1$、两项之和 $S_2$ 及 $f(x)$ 的图形.

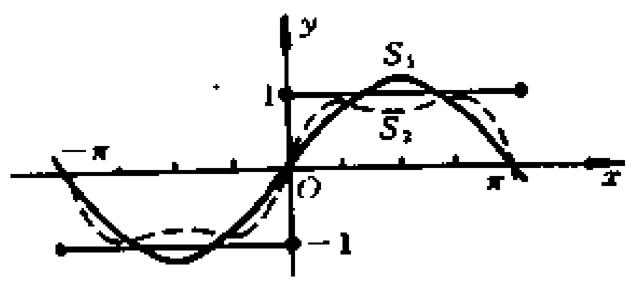



图 5.3

若令 $x=\frac{\pi}{2}$，则得

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=1,$$

即莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

在所指定的区间内把下列函数展开为福里叶级数：

2939. 在区间$(0,2l)$内展开

$$f(x)=\begin{cases}A,\text{若 } 0<x<l;\\0,\text{若 } l<x<2l,\end{cases}$$

其中 $A$ 为常数.

**解** 由于

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)dx=\frac{1}{l}\int_0^{l}Adx=A,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{l}A\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{A}{n\pi}[1-(-1)^n],$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}=\begin{cases}A,0<x<l,\\\frac{A}{2},x=l,\\0,l<x<2l.\end{cases}$$

2940. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=x$.

**解** 因为 $f(x)=x$ 为奇函数,从而 $a_0=a_n=0$,且

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{2}{n},$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$f(x)=\begin{cases}ax, 若 -\pi<x<0;\\ bx, 若 0<x<\pi,\end{cases}$$

其中 $a$ 及 $b$ 为常数.

**解** 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}axdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}bxdx=\frac{b-a}{2}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}bx\cos nxdx$$

$$=\frac{a-b}{n^2\pi}[1-(-1)^n];$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}ax\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}bx\sin nxdx$$

$$=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1}.$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

$$+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ bx, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

**2944.** 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=\pi^2-x^2$.

**解** 因为 $f(x)=\pi^2-x^2$ 为偶函数,从而 $b_n=0$,且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi^2-x^2)dx=\frac{2}{\pi}\left(\pi^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nxdx=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=-\frac{2}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_0^\pi+\frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_0^\pi+\frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi\cos nx\,dx$$

$$=\frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}.$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx=\pi^2-x^2\ (-\pi<x<\pi).$$

**2945.** 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=\cos ax$.

**解** 因为 $f(x)=\cos ax$ 为偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos ax\,dx=\frac{2}{a\pi}\sin a\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos ax\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(n+a)x+\cos(n-a)x]dx$$

$$=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}a}{n^2-a^2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]=\cos ax$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

**2946.** 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=\sin ax$.

**解** 因为 $f(x)=\sin ax$ 为奇函数，从而 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin ax\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(n-a)x-\cos(n+a)x]dx$$

$$=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-a^2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\sin a\pi}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}=\sin ax$$

$$(-x<x<\pi).$$

2947. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=\operatorname{sh}ax$.

**解** 因为 $f(x)$为奇函数，从而 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sh}ax\sin nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\operatorname{sh}ax\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\operatorname{ch}ax\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sh}a\pi+\frac{a}{n^2}\operatorname{ch}ax\sin nx\Big|_0^{\pi}\right.$$

$$\left.-\frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\operatorname{sh}ax\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sh}a\pi-\frac{a^2}{n^2}\int_0^{\pi}\operatorname{sh}ax\sin nx\,dx\right\}$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\operatorname{sh}a\pi-\frac{a^2}{n^2}b_n,$$

即

$$b_n=\frac{(-1)^{n+1}2n}{(n^2+a^2)\pi}\operatorname{sh}a\pi,$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2+a^2}=\operatorname{sh}ax(-\pi<x<\pi).$$

2948+. 在区间$(-h,h)$中展开 $f(x)=e^{ax}$.

**解** 由于

$$a_0=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}e^{ax}dx=\frac{1}{ah}(e^{ah}-e^{-ah})=\frac{2}{ah}\operatorname{sh}ah,$$

$$a_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}e^{ax}\cos\frac{n\pi x}{h}dx$$

$$=\frac{1}{h}\frac{a\cos\frac{n\pi x}{h}+\frac{n\pi}{h}\sin\frac{n\pi x}{h}}{a^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}e^{ax}\Big|_{-h}^{h}$$

$$=\frac{(-1)^n 2ah}{(ah)^2+(n\pi)^2}\text{sh}ah;$$

$$b_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}e^{ax}\sin\frac{n\pi x}{h}dx$$

$$=\frac{1}{h}\frac{a\sin\frac{n\pi x}{h}-\frac{n\pi}{h}\cos\frac{n\pi x}{h}}{a^2+\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}e^{ax}\Big|_{-h}^{h}$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}2n\pi}{(ah)^2+(n\pi)^2}\text{sh}ah,$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$2\text{sh}ah\left[\frac{1}{2ah}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos\frac{n\pi x}{h}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2+(n\pi)^2}\right]$$

$$=e^{ax}(-h<x<h).$$

2949. 在区间$(a,a+2l)$中展开$f(x)=x$.

**解** 由于

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}xdx=2(a+l),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\cos\frac{n\pi x}{l}dx)$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}-\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi a}{l};$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{-1}{n\pi}x\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_a^{a+2l}+\frac{1}{n\pi}\int_a^{a+2l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=-\frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l},$$

故按展开定理，$f(x)$在$(a,a+2l)$中可展开为

$$a+l+\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)=x\,(a<x<a+2l).$$

2950. 在区间$(-\pi,\pi)$中展开 $f(x)=x\sin x$.

**解** 因为$f(x)$为偶函数，从而$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx\right)$$

$$=2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{x\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right\}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\;(n=2,3,\cdots),$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin x\cos x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin 2x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]\Big|_0^{\pi}=-\frac{1}{2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx=x\sin x$$

$$(-\pi<x<\pi).$$

2951. 在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$中展开 $f(x)=x\cos x$.

**解** 因为 $f(x)$为奇函数，从而 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\sin 2nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x[\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}-\frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1}+\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}16}{\pi}\cdot\frac{n}{(4n^2-1)^2},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx=x\cos x$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

将下列周期函数展开成福里叶级数：

2952. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

**解** 由于

$f(x+2\pi)=\operatorname{sgn}[\cos(x+2\pi)]=\operatorname{sgn}(\cos x)=f(x)$,

故 $f(x)$是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，又 $f(x)$为偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)dx\right)$$
$$=0,$$
$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sgn}(\cos x)\cos nx dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx dx\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0,\text{当 } n \text{ 为偶数},\\(-1)^k\frac{4}{(2k+1)\pi},n=2k+1\end{cases}$$
$$(k=0,1,2,\cdots),$$

故按展开定理，$f(x)$在$(-\pi,\pi)$上可展开为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right]=\operatorname{sgn}(\cos x).$$

注意，此式在$f(x)$的不连续点$x=-\frac{\pi}{2}$和$x=\frac{\pi}{2}$也成立，这是因为在这些点满足$f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$. 于是，上述展式对一切$-\infty<x<+\infty$皆成立.

2953. $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

**解** $f(x)$是以$2\pi$为周期的连续周期函数，又$f(x)$在$(-\pi,\pi)$内为一奇函数，从而$a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\sin x)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)\sin nx\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{n}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, \text{当 } n \text{ 为偶数}, \\ (-1)^k\dfrac{4}{\pi(2k+1)^2}, n=2k+1\end{cases}$$

$$(k=0,1,2,\cdots),$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x=\arcsin(\sin x)$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2954. $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

**解** $f(x)$是以 $2\pi$ 为周期的连续周期函数，又 $f(x)$为偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\cos x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\arcsin(\cos x)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\sin nx-\frac{x}{n}\sin nx-\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, \text{当 } n \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{4}{(2k+1)^2\pi}, n=2k+1 \quad (k=0,1,2,\cdots),\end{cases}$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}=\arcsin(\cos x)$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2955. $f(x)=x-[x]$.

**解** 因为

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1$$
$$=x-[x]=f(x),$$

故 $f(x)$是以 1 为周期的周期函数. 而且，除 $x=k$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$诸点外，$f(x)$都连续. 由于

$$a_0=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}dx=2\int_0^1 xdx=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\cos 2n\pi x dx$$

$$=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x dx$$

$$=2\left[\frac{x}{2n\pi}\sin 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos 2n\pi x\right]\Bigg|_0^1=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\sin 2n\pi x dx$$

$$=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x dx$$

$$=2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\sin 2n\pi x\right]\Bigg|_0^1$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2}=(x)$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2957. $f(x)=|\sin x|$.

**解** $f(x)$是以 $\pi$ 为周期的连续周期函数，又 $f(x)$为偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cos 2nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x]dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x+\frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1},$$

故按展开定理，$f(x)$可展开为

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}=|\sin x|$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2958. $f(x)=|\cos x|$.

**解** 由于

$$f(x)=|\cos x|=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|,$$

故有

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{4n^2-1}{}^{*)}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2nx}{4n^2-1}$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

*)利用 2957 题的结果.

2959. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}(|\alpha|<1)$.

**解** 显然 $p_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}$是$-\infty<x<+\infty$上的连续函数,注意,当 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots,)$时,函数值理解为其极限值

$$\lim_{x\to k\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}=\lim_{x\to k\pi}\frac{n\cos nx}{\cos x}=n(-1)^{(n-1)k},$$

并且 $p_n(x)$是一个周期为 $2\pi$ 的周期函数且为偶函数.此外,

$$p_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin(n-1)x\cos x+\cos(n-1)x\sin x}{\sin x}$$

$$=p_{n-1}(x)\cos x+\cos(n-1)x,$$

故

$$|p_n(x)|\leqslant|p_{n-1}(x)|+1(-\infty<x<+\infty)$$

$$(n=2,3,\cdots).$$

注意到 $p_1(x)\equiv1$,由上式,利用归纳法即知

$$|p_n(x)|\leqslant n(-\infty<x<+\infty,n=1,2,\cdots).$$

于是，

$$\left|\alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}\right| \leqslant n|\alpha|^n \quad (-\infty<x<+\infty, n=1,2,\cdots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha|^n$ 收敛（因为 $|\alpha|<1$），故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \text{ 在 } -\infty<x<+\infty \text{ 上一致收敛. 由此}$$

可知，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，且在任何有限区间上均可逐项积分.

注意到 $f(x)$ 为以 $2\pi$ 为周期的周期函数，并且是偶函数，故 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=2,4,\cdots} \alpha^n \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx+\sum_{n=1,3,\cdots} \alpha^n \int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx\right)$$

$$=2\sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k+1} {}^{*)}=\frac{2\alpha}{1-\alpha},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^\pi \frac{\sin mx \cos nx}{\sin x} dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^\pi \frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x} dx$$

$$=I_1+I_2,$$

其中

$$I_1=\frac{1}{\pi}\sum_{m\leqslant n} \alpha^m \int_0^\pi \frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x} dx,$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}\sum_{m>n}\alpha^m\int_0^\pi\frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{\sin x}dx.$$

当 $m\leqslant n$ 时，不论 $m+n$ 及 $m-n$ 是偶数，还是 $m+n$ 及 $m-n$ 是奇数，$I_1$ 中诸积分都为零，故有 $I_1=0$. 当 $m>n$ 时，若 $m+n$ 及 $m-n$ 为偶数，则 $I_2$ 中对应的积分等于零；若 $m+n$ 及 $m-n$ 为奇数，则 $I_2$ 中对应的积分等于 $2\pi$. 于是，

$$I_2=2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{(2k+1)+n}=2\cdot\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha^2}.$$

由于 $a_n=I_2$，故按展开定理，$f(x)$ 可展开为

$$f(x)=\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\cos nx\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

*) 利用 2291 题的结果

2960⁺. 把函数

$$f(x)=\sec x\left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right)$$

展开为福里叶级数.

**解** 显然 $f(x)=\sec x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 内连续，而且是偶函数，故

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx$$

$$=\frac{8}{\pi}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})}\right|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{1-\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\left[\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}),$$

$$a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4nx}{\cos x}dx \qquad (n=1,2,\cdots).$$

由于

$$\cos 4nx-\cos(4nx-4x)$$

$$=-2\sin(4nx-2x)\sin 2x$$

$$=-4\sin(4nx-2x)\sin x\cos x$$

$$=2[\cos(4nx-x)-\cos(4nx-3x)]\cos x,$$

故

$$a_n=\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4nx}{\cos x}dx$$

$$=\frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\cos(4n-1)x-\cos(4n-3)x]dx$$

$$+\frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x}dx$$

$$=\frac{16}{\pi}\Big[\frac{1}{4n-1}\sin(n\pi-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{4n-3}$$

$$\sin(n\pi-\frac{3}{4}\pi)\Big]+a_{n-1}$$

$$=\frac{16}{\pi}\Big[\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}\sin\frac{3\pi}{4}\Big]+a_{n-1}$$

$$=\frac{16}{\pi}(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-1})+a_{n-1}$$

$$=\frac{16}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)}+a_{n-1}(n=1,2,\cdots).$$

由此递推公式，得

$$a_n=\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)}+a_0$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)}$$

$$+\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})(n=1,2,\cdots).$$

于是，下面的展式成立：

$$\sec x=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})\right.$$

$$\left.-\frac{16\sqrt{2}}{\pi}\right]\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)}\right]\cos 4nx$$

$$\left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right).$$

2961. 将函数 $f(x)=x^2$ 展开成福里叶级数：(a)按余弦展开；(б)按正弦展开；(в)在区间$(0,2\pi)$内展开.

绘出函数的图形及情形(a)，(б)与(в)的福里叶级数之和的图形.

利用这些展开式，求级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\text{ 及 }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

**解** (a)由于 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^\pi$$

$$=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$

故 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上按余弦展开为

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

(б)由于 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2}{n^2}x\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1],$$

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上按正弦展开为

$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}$$
$$=x^2\qquad(0\leqslant x<\pi).$$

(в)由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx.$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{-4\pi}{n},$$

故 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上可展开为

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$
$$=x^2\qquad(0<x<2\pi).$$

函数的图形，(a)、(б) 及(в) 的福里叶级数之和的图形，如图 5.4、图 5.5、图 5.6 及图 5.7 所示.

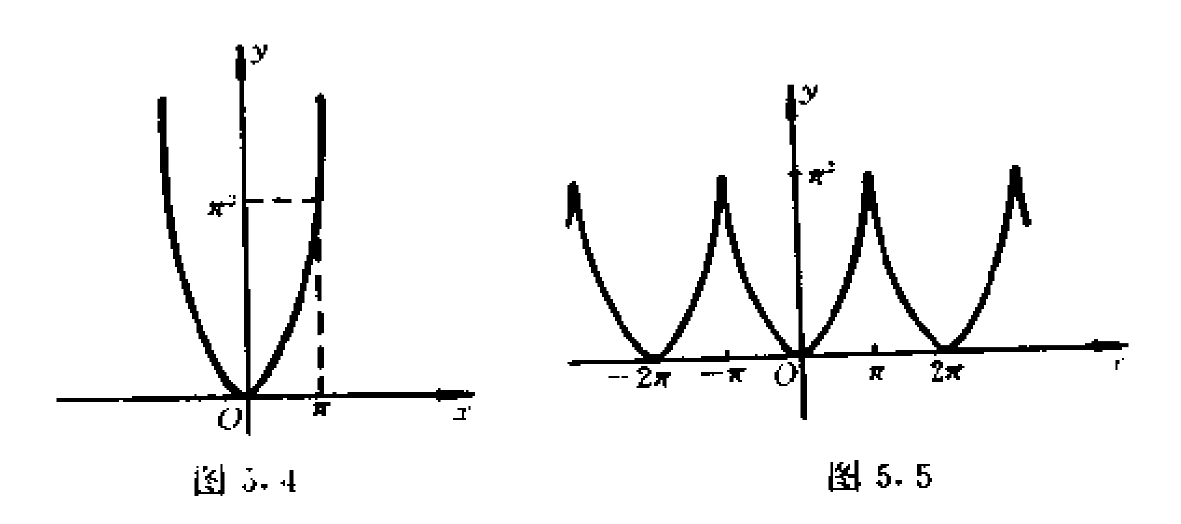



图 5.4　　　图 5.5

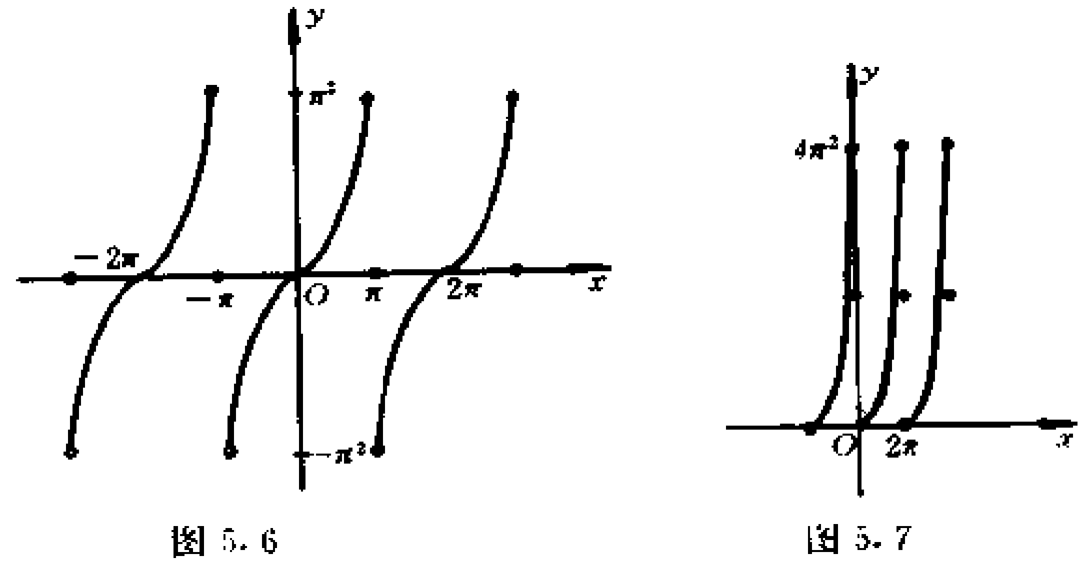



图 5.6　　　图 5.7

若在展开式(a) 中令 $x=\pi$，则得

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-1)^n=\pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

若在展开式(B)中令 $x=\pi$，则得

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{2}$$

将级数(1)和(2)相加，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{4},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{3}$$

2962. 由展开式

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}(-\pi<x<\pi),$$

用逐项积分的方法，求函数 $x^2$，$x^3$ 和 $x^4$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数.

**解** 将原式在 $[0,x]$ 上逐项积分，得

$$\frac{x^2}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx-1}{n^2}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

代入上式，即得

$$= \pi^2 x + 12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin nx}{n^3},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12} \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

将上式从 0 到 $x$ 积分，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^4} = \frac{2\pi^2 x^2 - x^4}{48}$$

$$(-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

以 $x = \pi$ 代入，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1-(-1)^n}{n^4} = \frac{\pi^4}{48},$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \tag{1}$$

由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \tag{2}$$

收敛，故可设其和为 $S$. 于是，由(2) − (1) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

即

$$\frac{S}{16} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

从而

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

同时，还可求出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{2^4\cdot 90}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}$$

$$=\pi^4\left(\frac{1}{96}-\frac{1}{2^4\cdot 90}\right)=\frac{7}{720}\pi^4.$$

也可利用此结果求得 $x^4$ 的展开式，事实上，将 $x^3$ 的展开式从 0 到 $x$ 积分，再以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}\text{ 及 }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$$

代入即得．

2963．写出函数

$$f(x)=\begin{cases}1,\text{当 }|x|<\alpha,\\0,\text{当 }\alpha<|x|<\pi\end{cases}$$

的李雅甫诺夫等式．

由李雅甫诺夫等式，求下列级数之和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\text{ 及 }\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

**解**　由于 $f(x)$ 为偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}dx=\frac{2\alpha}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos nx dx=\frac{2\sin n\alpha}{n\pi},$$

又

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}dx=\frac{2\alpha}{\pi},$$

故对应于 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上展开的李雅甫诺夫等式为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{2\alpha}{\pi}.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2},$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$$
$$=\frac{\pi^{2\,*)}}{6}-\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}=\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}.$$

*)利用 2961 题的结果.

**2964.** 将函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 若\ 1<x<2,\\ 3-x, & 若\ 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

展成福里叶级数.

**解** 将 $f(x)$ 在[0,3]上按周期为 3 作福里叶展开，注意其图象，易见 $f(x)$ 的延拓(周期为 3)是偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{1}{\frac{3}{2}}\int_0^3 f(x)dx$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^1 xdx+\frac{2}{3}\int_1^2 dx+\frac{2}{3}\int_2^3(3-x)dx$$
$$=\frac{4}{3},$$
$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx+\frac{2}{3}\int_1^2\cos\frac{2n\pi x}{3}dx$$

$$+\frac{2}{3}\int_2^3(3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}+\frac{9}{4n^2\pi^2}\right.\right.$$

$$\left.\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]\Big|_0^1+\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_1^2$$

$$+\left[\frac{9}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}-\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\right]\Big|_2^3\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left[-\frac{9}{2(n\pi)^2}+\frac{9}{4(n\pi)^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\cos\frac{4n\pi}{3}\right)\right]$$

$$=-\frac{3}{(n\pi)^2}+\frac{3}{(n\pi)^2}(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3},$$

故按展开定理，$f(x)$在$[0,3]$可按余弦展开为

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\right]\cos\frac{2n\pi x}{3}$$

$$=f(x).$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{3}\right]\cos\frac{2n\pi x}{3}$$

$$=(-\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1^2}\cdot\frac{1}{2})\cos\frac{2\pi x}{3}$$

$$+(-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2})\cos\frac{4\pi x}{3}$$

$$+(-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2})\cos 2\pi x$$

$$+(-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{2})\cos\frac{8\pi x}{3}$$

$$+\left(-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cos\frac{10\pi x}{3}$$

$$+\left(-\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}\right)\cos 4\pi x+\cdots$$

$$=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{3}{2}$$

$$\cdot\frac{1}{3^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x,$$

故 $f(x)$ 的余弦展开式可写为

$$\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2n\pi x$$

$$=f(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 3).$$

利用公式

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t}),\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

式中 $t=e^{ix}$ 及 $\bar{t}=e^{-ix}$，将下列函数展开成福里叶级数：

2965⁺. $\cos^{2m}x$（$m$ 为正整数）.

**解** $\cos^{2m}x$

$$=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2m}$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{l=0}^{2m}C_{2m}^{l}e^{(2m-l)ix}e^{-lix}$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\left(\sum_{l=0}^{m-1}+\sum_{l=m+1}^{2m}\right)C_{2m}^{l}e^{2(m-l)ix}$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\left[\sum_{l=0}^{m-1}C_{2m}^{l}e^{2(m-l)ix}\right.$$

$$\left.+\sum_{l'=0}^{m-1}C_{2m}^{2m-l'}e^{-2(m-l')ix}\right]$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}+\frac{1}{2^{2m}}\sum_{s=0}^{m-1}C_{2m}^{s}\left[e^{2(m-s)ix}+e^{-2(m-s)ix}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{s=0}^{m-1}C_{2m}^{s}\cos 2(m-s)x$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{m-k}\cos 2kx.$$

由于上述表达式为一三角多项式，故在$(-\infty, +\infty)$中的福里叶展开式即为它本身．

**2966.** $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}(|q|<1)$.

**解** 由于

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{\frac{q}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}$$

$$=\frac{1}{2i}\frac{q(e^{ix}-e^{-ix})}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}}-\frac{1}{1-qe^{-ix}}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}[(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)-(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)]=q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots,$$

及级数

$$q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$$

满足$|q^n\sin nx|\leqslant q^n$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n(|q|<1)$收敛，故级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛．因此，级数

$$q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$$

即为其和$\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$（它是周期为$2\pi$的奇函数）的福里叶级数，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

2967. $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}(|q|<1)$.

**解** 由于

$$\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1-q^2}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}$$

$$=(1-q^2)\frac{1}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}$$

$$=-1+\frac{1}{1-qe^{ix}}+\frac{1}{1-qe^{-ix}}$$

$$=-1+(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)$$

$$+(1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\cdots)$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx,$$

又上式右端的级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，因而它就是函数$\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$的福里叶级数（在$-\infty<x<+\infty$上）.

2968. $\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}(|q|<1)$.

**解** 由于

$$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{1-\frac{q}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2-qe^{ix}-qe^{-ix}}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-qe^{ix}}+\frac{1}{1-qe^{-ix}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\cdots)+(1+qe^{-ix}$$

$$+q^2e^{-2ix}+\cdots)]$$

$$=1+q\cos x+q^2\cos 2x+\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx,$$

又上式右端的级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，因而它就是函数$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$的福里叶级数（在$-\infty<x<+\infty$上）.

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $(|q|<1)$.

**解** 由于$1-2q\cos x+q^2 \geqslant 1-2q+q^2=(1-q)^2>0$，故$\ln(1-2q\cos x+q^2)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，而且是周期为$2\pi$的偶函数，将函数对$x$求导数，得

$$[\ln(1-2q\cos x+q^2)]' = \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx^{*)} \quad (-\infty<x<+\infty).$$

对上式从0到$x$积分（由于上式中级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故可在有限区间上逐项积分），则有

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)$$

$$= \int_0^x \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}dx + 2\ln(1-q)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x q^n \sin nx dx + 2\ln(1-q)$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n}\cos nx + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + 2\ln(1-q).$$

而

$$\ln(1-q) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n},$$

于是

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx$$
$$(-\infty<x<+\infty).$$

由于右端级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，故它就是左端函数的福里叶级数．

*)利用 2966 题的结果．

将下列无界周期函数展开成福里叶级数：

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

**解** $f(x)$是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，当 $x=2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时函数有无穷不连续点．由于$f(x)$是偶函数，从而 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt$$
$$=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{*)}=-2\ln 2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cos nx dx$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin nx\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt$$
$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}dt$$

*）利用 2353 题的结果．

* *）利用 2291 题的结果．

2971. $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

**解** 利用 2970 题的结果，即得

$$\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\ln\left|\sin\frac{\pi-x}{2}\right|$$
$$=-\ln2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\pi-x)}{n}$$
$$=-\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx$$
$$(x\neq(2m+1)\pi, m=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

2972. $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

**解** 利用 2970 题及 2971 题的结果，即得

$$\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$$
$$=\left(-\ln2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\right)-\left[-\ln2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos nx\right]$$
$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$$
$$(x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

2973. 将函数

$$f(x)=\int_0^x\ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}dt\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

展开成福里叶级数．

**解** 将函数对 $x$ 求导数，则得

$$f'(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}^{*)}.$$

由于 $f'(x)=-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

在 $(-\pi,\pi)$ 内绝对可积，故得

$$\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}$$

$$(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

*)利用 2972 题的结果.

**2974.** 函数

$$x=x(s),y=y(s)\qquad(0\leqslant s\leqslant 4a)$$

是正方形：$0<x<a,0<y<a$ 的围线的参数方程式，其中 $s$ 为依逆时针方向从点 $O(0,0)$ 起计算的弧长.试将这函数展开成福里叶级数.

**解** 根据定义，$x(s)$ 的表达式可写为

$$x(s)=\begin{cases}s, & 0\leqslant s\leqslant a,\\ a, & a\leqslant s\leqslant 2a,\\ 3a-s, & 2a\leqslant s\leqslant 3a,\\ 0, & 3a\leqslant s\leqslant 4a.\end{cases}$$

于是，$x(s)$ 在 $[0,4a]$ 上的福里叶级数展开为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi s}{2a}+b_n\sin\frac{n\pi s}{2a}\right),$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2a}\int_0^{4a} x(s)ds \\
&= \frac{1}{2a}\left[\int_0^a s ds + \int_a^{2a} a ds + \int_{2a}^{3a}(3a-s)ds\right] \\
&= a,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2a}\int_0^{4a} x(s)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds \\
&= \frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\cos\frac{n\pi s}{2a}ds + \int_0^{2a} a\cos\frac{n\pi s}{2a}ds \right.\\
&\quad \left. + \int_{2a}^{3a}(3a-s)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left\{\left[\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)\right]\right.\\
&\quad + \left[-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right] + \left[\left(\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\right.\\
&\quad \left.\left. - \frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2} - \left(\frac{2a}{n\pi}\right)^2\left(\cos\frac{3n\pi}{2}-\cos n\pi\right)\right]\right\} \\
&= \frac{2a}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - \cos\frac{3n\pi}{2} + \cos n\pi\right) \\
&= \begin{cases} 0, \text{当 } n=2k; & \\ & (k=0,1,2,\cdots) \\ -\dfrac{4a}{\pi^2(2k+1)^2}, \text{当 } n=2k+1; & \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2a}\int_0^{4a} x(s)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds \\
&= \frac{1}{2a}\left[\int_0^a s\sin\frac{n\pi s}{2a}ds + \int_0^{2a} a\sin\frac{n\pi s}{2a}ds \right.\\
&\quad \left. + \int_{2a}^{3a}(3a-s)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds\right] \\
&= \frac{1}{2a}\left\{\left[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi}{2}\right]\right.\\
&\quad + \left[-\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$+\left[\left(-\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}+\frac{6a^2}{n\pi}\cos n\pi\right)\right.$$
$$+\left(\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n\pi}\cos n\pi\right)$$
$$\left.\left.+\left(-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\right]\right\}$$
$$=\frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin\frac{3n\pi}{2}\right)$$
$$=\begin{cases}0,\text{当 } n=2k,k=1,2,3,\cdots,\\ \dfrac{4a(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2},\text{当 } n=2k+1.\ k=0,1,2,3,\cdots.\end{cases}$$

因此,按展开定理,注意到 $x(0)=x(4a)$,$x(s)$的福里叶展开式为

$$x(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$
$$+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$
$$(0\leqslant s\leqslant 4a).$$

同样,根据定义,$y(s)$的表达式为

$$y(s)=\begin{cases}0, & 0\leqslant s\leqslant a,\\ s-a, & a\leqslant s\leqslant 2a,\\ a, & 2a\leqslant s\leqslant 3a,\\ 4a-s, & 3a\leqslant s\leqslant 4a.\end{cases}$$

于是,$y(s)$在$[0,4a]$上的福里叶级数展开为

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi s}{2a}+B_n\sin\frac{n\pi s}{2a}\right),$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)ds=\frac{1}{2a}\left[\int_a^{2a}(s-a)ds+\int_{2a}^{3a}ads\right.$$

$$+\int_{3a}^{4a}(4a-s)ds\Big]=a,$$

$$A_n=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds$$

$$=\frac{1}{2a}\Big[\int_a^{2a}(s-a)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds+\int_{2a}^{3a}a\cos\frac{n\pi s}{2a}ds$$

$$+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\cos\frac{n\pi s}{2a}ds\Big]$$

$$=\frac{1}{2a}\Big\{\Big[\Big(-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2})\Big)$$

$$-\Big(-\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\Big)\Big]+\Big[\frac{2a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\Big]$$

$$+\Big[\Big(-\frac{8a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}\Big)-\Big(-\frac{6a^2}{n\pi}\sin\frac{3n\pi}{2}$$

$$+\frac{4a^2}{n^2\pi^2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{3n\pi}{2}\Big)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{2a}{n^2\pi^2}\Big(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}-1+\cos\frac{3n\pi}{2}\Big)$$

$$=\begin{cases}0,\text{当 } n=2k,k=1,2,3,\cdots,\\ \dfrac{-4a}{\pi^2(2k+1)^2},\text{当 } n=2k+1,k=0,1,2,3,\cdots;\end{cases}$$

$$B_n=\frac{1}{2a}\int_0^{4a}y(s)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds$$

$$=\frac{1}{2a}\Big[\int_a^{2a}(s-a)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds$$

$$+\int_{2a}^{3a}a\sin\frac{n\pi s}{2a}ds+\int_{3a}^{4a}(4a-s)\sin\frac{n\pi s}{2a}ds\Big]$$

$$=\frac{1}{2a}\Big\{\Big[\Big(-\frac{4a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\Big)$$

$$-\Big(-\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\Big)\Big]+\Big(-\frac{2a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}$$

$$+\frac{2a^2}{n\pi}\cos n\pi\Big)+\Big[\Big(-\frac{8a^2}{n\pi}+\frac{8a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}\Big)$$

$$-\left(-\frac{8a^2}{n\pi}-\frac{6a^2}{n\pi}\cos\frac{3n\pi}{2}-\frac{4a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{3n\pi}{2}\right)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{2a}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{3n\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}0,\text{当 } n=2k,k=1,2,3,\cdots,\\ \dfrac{4a(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2},\text{当 } n=2k+1,k=0,1,2,3,\cdots.\end{cases}$$

因此，按展开定理，注意到 $y(0)=y(4a)$，得 $y(s)$ 的福里叶级数展开为

$$y(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$

$$+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$$

$$(0\leqslant s\leqslant 4a).$$

2975. 应当如何把给定在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延展到区间 $(-\pi,\pi)$ 内，而使得它展开成福里叶级数的形状如下：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x \quad (-\pi<x<\pi)$$

**解** 由于展开式中无正弦项，故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi,\pi)$ 内应满足 $f(-x)=f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 的部分记以 $g(x)$，则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nx\,dx=0$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$，即得

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-y)\cos 2ny\,dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos 2nx\,dx=0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[f(\pi-x)+g(x)]\cos 2nx dx=0$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$

为要上式成立，显然只要求对于$(\frac{\pi}{2},\pi)$内任一$x$值，恒有

$$f(\pi-x)+g(x)=0,$$

即

$$g(x)=-f(\pi-x).$$

总之，首先要在$(\frac{\pi}{2},\pi)$内定义一个函数，使它等于$-f(\pi-x)$；然后，再按偶函数延拓到$(-\pi,0)$. 不妨将延拓到$(-\pi,\pi)$上的函数仍记为$f(x)$，则由上述讨论知，必有

$$f(-x)=f(x),f(\pi-x)=-f(x)\quad(-\pi<x<\pi).$$

**2976.** 应当如何把给定在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内的可积函数$f(x)$延展到区间$(-\pi,\pi)$内，而使得它展开成福里叶级数的形状如下：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n-1)x\qquad(-\pi<x<\pi)$$

**解** 由于展开式中无余弦项，故$f(x)$延拓到$(-\pi,\pi)$内应满足$f(-x)=-f(x)$. 函数$f(x)$延拓到$(\frac{\pi}{2},\pi)$的部分记以$g(x)$，则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\sin 2nx dx=0$$

$(n=1,2,\cdots)$.

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$，即得

$$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-y)\sin 2ny\,dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\sin 2nx\,dx=0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)+g(x)]\sin 2nx\,dx=0$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

为要上式成立，显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内任一 $x$ 值，恒有

$$-f(\pi-x)+g(x)=0,$$

即

$$g(x)=f(\pi-x).$$

总之，首先要在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内定义一个函数，使它等于 $f(\pi-x)$；然后，再按奇函数延拓到 $(-\pi,\pi)$. 不妨将延拓到 $(-\pi,\pi)$ 上的函数仍记为 $f(x)$，则由上述讨论知，必有

$$f(-x)=-f(x),f(\pi-x)=f(x).$$

**2977.** 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内把函数

$$f(x)=x(\frac{\pi}{2}-x)$$

展开：(a)依角的奇倍数的余弦展开；(б)依角的奇倍数的正弦展开.

绘出情形(a)与(б)的福里叶级数之和的图形.

**解** (a)利用 2975 题的结果，延拓函数，使有

$$f(-x)=f(x),f(\pi-x)=-f(x).$$

于是，有

$$a_{2k+1}=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2k+1)x dx\right.$$
$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)]\cos(2k+1)x dx\right\}.$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi-x=y$，则得到与第一个积分同样的结果，即

$$a_{2k+1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2k+1)x dx$$
$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2k+1)x dx$$
$$=\frac{4}{(2k+1)\pi}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin(2k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$-\frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\sin(2k+1)x dx$$
$$=\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\left[\frac{\pi}{2}\cos(2k+1)x\right.$$
$$\left.-2x\cos(2k+1)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$+\frac{8}{(2k+1)^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2k+1)x dx$$
$$=-\frac{2}{(2k+1)^2}+\frac{8}{(2k+1)^3\pi}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}$$
$$=-\frac{2}{(2k+1)^2}+\frac{8\cdot(-1)^k}{(2k+1)^3\pi}\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

于是，$f(x)$ 的展开式为

$$-2\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{(2k+1)^2}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right]\right.$$

$$+\frac{4}{(2k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\cos(2k+1)xdx$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2\pi}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\sin(2k+1)x\right\}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+\frac{8}{(2k+1)^2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2k+1)xdx$$

$$=\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{8}{(2k+1)^3\pi}$$

$$(k=0,1,2,\cdots).$$

于是，$f(x)$的展开式为

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{4}{(2k+1)^3\pi}\right]\sin(2k+1)x\right\}$$

$$=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

其和的图形如图 5.8 所示.

**2978.** 设 $f(x)$是以 $\pi$ 为周期的反周期函数，即

$$f(x+\pi)=-f(x).$$

问此函数在区间$(-\pi,\pi)$内的福里叶级数是有怎样的特性?

**解** 由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0}f(\pi+x)\cos nxdx\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx\right\}\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

故在上式右端第一个积分中令 $x+\pi=y$，则得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^{n+1}+1]f(x)\cos nxdx.$$

于是，得 $a_{2n}=0(n=0,1,2,\cdots)$. 同理，可得 $b_{2n}=0(n=1,2,\cdots)$. 因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n}=0(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_{2n}=0(n=1,2,\cdots).$$

2979. 设 $f(x+\pi)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数具有怎样的特性?

**解** 与 2978 题类似，我们可求得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[(-1)^n+1]f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

因此，有

$$a_{2n-1}=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

同理，可求得

$$b_{2n-1}=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

即函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

2980. 一个具周期为 $2\pi$ 的函数 $y=f(x)$，如果函数的图形：(a)以点 $(0,0)$，$\left(\pm\frac{\pi}{2},0\right)$ 为对称中心；(6)以坐标原点为对称中心及 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 为对称轴；问其福里叶系数 $a_n$，$b_n(n=1,2,3,\cdots)$ 具有怎样的特性?

**解** (a)由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), f(\pi-x)=-f(x).$$

因此，$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin nx dx\right.$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[-f(\pi-x)]\sin nx dx\Big\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin nx dx$$

$$+(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y)\sin ny dy\Big\}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^n]f(x)\sin nx dx,$$

从而 $b_{2n-1}=0(n=0,1,2,\cdots)$. 即 $f(x)$的福里叶级数的特性为

$$a_n=0 \qquad (n=1,2,\cdots),$$

$$b_{2n-1}=0 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

(б)由题设函数 $f(x)$满足

$$f(-x)=-f(x), f(\pi-x)=f(x).$$

同(a)一样,$a_n=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots)$,而

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^{n+1}]f(x)\sin nx dx,$$

故 $b_{2n}=0(n=1,2,3,\cdots)$. 因此,$f(x)$的福里叶系数的特性为

$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_{2n}=0 \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

**2981.** 如果函数 $\varphi(-x)=\psi(x)$,问 $\varphi(x)$与 $\psi(x)$的福里叶系数 $a_n,b_n$ 与 $\alpha_n,\beta_n(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系?

**解** 函数 $\varphi(x),\psi(x)$的福里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx,$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx dx,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx dx,$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx dx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx\right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$，并将 $\varphi(-x)=\psi(x)$ 代入，即得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\psi(x)\cos nx dx+\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx dx=\alpha_n.$$

同理，有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\sin nx dx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nx dx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\sin nx dx-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\sin nx dx\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx dx=-\beta_n.$$

因此，$\varphi(x)$、$\psi(x)$ 的福里叶系数 $a_n$、$b_n$ 与 $\alpha_n$、$\beta_n$ 的关系为

$$a_n=\alpha_n \qquad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=-\beta_n \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

2982. 如果函数

$$\varphi(-x)=-\psi(x),$$

问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 $a_n$，$b_n$ 与 $\alpha_n$，$\beta_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 之间有何关系?

**解** 函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 的福里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx;$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx,$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\,dx.$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx\,dx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx\right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$，并将

$$\varphi(-x)=-\psi(x)$$

代入，即得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\,dx=-\alpha_n.$$

同理，有

$$b_n=\beta_n.$$

因此，$\varphi(x)$、$\psi(x)$的福里叶系数 $a_n$、$b_n$ 与 $\alpha_n$、$\beta_n$ 的关系为

$$a_n=-\alpha_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\beta_n\qquad(n=1,2,3,\cdots).$$

2983. 已知周期为 $2\pi$ 的可积分函数 $f(x)$的福里叶系数为 $a_n$，$b_n(n=0,1,2,\cdots)$，试计算"平移"了的函数 $f(x+h)$ ($h=$常数)的福里叶系数$\overline{a_n}$，$\overline{b_n}(n=0,1,2,\cdots)$.

**解** 在福里叶系数$\overline{a_n}$的表达式中作代换 $x+h=y$，并注意到 $f(x)$的周期性，即有

$$\overline{a_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(y)[\cos nh\cos ny+\sin nh\sin ny]dy$$

$$=\frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\cos nh dx$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\sin nh dx\Big]$$

$$=a_n\cos nh+b_n\sin nh.$$

同理,可求得

$$\overline{b_n}=b_n\cos nh-a_n\sin nh.$$

2984. 已知周期为 $2\pi$ 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 $a_n$, $b_n(n=0,1,2,\cdots)$,试计算斯且克洛夫函数

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi$$

的福里叶系数 $A_n, B_n(n=0,1,2,\cdots)$.

**解** 由于

$$f_h(x+2\pi)=\frac{1}{2h}\int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi=f_h(x),$$

故 $f_h(x)$ 仍为以 $2\pi$ 为周期的周期函数.

于是,有(作代换 $\xi=x+y$)

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_h(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\int_{-h}^{h} f(x+y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi h}\int_{-h}^{h} dy\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\cos nx dx.$$

根据 2983 题的结果可知

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\cos nx dx = a_n\cos ny + b_n\sin ny,$$

故

$$A_n = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}(a_n\cos ny + b_n\sin ny)dy$$

$$= \frac{a_n}{h}\int_0^h \cos ny dy = \begin{cases} a_n, 当\ n=0\ 时; \\ \dfrac{a_n\sin nh}{nh}, 当\ n=1,2,\cdots 时. \end{cases}$$

即

$$A_0 = a_0,$$

$$A_n = \frac{a_n\sin nh}{nh} \quad (n=1,2,\cdots).$$

同理可得

$$B_n = \frac{b_n\sin nh}{nh} \quad (n=1,2,\cdots).$$

2985. 设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的连续函数并且 $a_n, b_n(n=0,1,2,\cdots)$ 为其福里叶系数. 求卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

的福里叶系数 $A_n, B_n(n=0,1,2,\cdots)$

利用所得的结果,推出李雅甫诺夫等式.

**解** 由于

$$F(x+2\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+2\pi+t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt = F(x),$$

故 $F(x)$ 仍是以 $2\pi$ 为周期的函数. 于是,有

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\right]^2=a_0^2,$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)(\cos n\xi\cos nt$$

$$+\sin n\xi\sin nt)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_n f(t)\cos nt+b_n f(t)\sin nt]dt$$

$$=a_n^2+b_n^2;$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi)(\sin n\xi\cos nt$$

$$-\cos n\xi\sin nt)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[b_n f(t)\cos nt-a_n f(t)\sin nt]dt$$

$$=b_n a_n-a_n b_n=0.$$

由 $f(x)$ 的连续性知，$F(x)$ 不仅以 $2\pi$ 为周期而且是连续函数，故按展开定理，注意到 $B_n=0(n=1,2,3,\cdots)$，即得

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx.$$

因此，特别地，有

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

但已知

$$A_0 = a_0^2, A_n = a_n^2 + b_n^2,$$

且

$$F(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(0+t) dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt,$$

故得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_n^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

这就是李雅甫诺夫等式.

## § 7. 级数求和法

1° **直接求和法**　若

$$u_n = v_{n+1} - v_n (n = 1, 2, \cdots) \text{ 及 } \lim_{n\to\infty} v_n = v_\infty,$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_\infty - v_1.$$

特别是，若

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}},$$

其中数 $a_i (i = 1, 2, \cdots)$ 形成以 $d$ 为公差的等差级数，则

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形未知级数能表为下列已知级数的线性组合：

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

**2987.** $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots.$

**解** 由 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$，并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ *)，即得

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left[ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$- \frac{1}{2} \lim_{N \to \infty} \left[ \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

*）利用 2549 题的结果.

**2988.** $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots.$

**解** $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}-1\right\}=2\ln 2-1.$$

2989. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

**解** 由于

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+3}$$

$$=\frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{2}{n+3}\right)$$

$$-\frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right)^{*)}=\frac{1}{4}.$$

*）利用 2987 题的结果.

2990. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$（$m$ 为自然数）.

**解** 由$\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n})$，考虑适当大的正整数 $N$，并令 $N\to\infty$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m)}$$

$$= \frac{1}{m} \lim_{N \to \infty} \sum^{N=1} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right)$$

$$= \frac{1}{m} \lim_{N \to \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \cdots - \frac{1}{N+m} \right) = \frac{1}{m} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right).$$

**2991.** $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots.$

**解** 由 $\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right],$$ 得

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots \right]$$

$$= \frac{1}{2} (2\ln 2 - 1)^{*)} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

*) 注意原级数的绝对收敛性,并利用 2988 题的结果.

**2992.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$

**解** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \to \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

2993. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

**解** 由 $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$，得

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)^{*)} = 1.$$

*）所写级数均为绝对收敛级数，并利用 2961 题的结果（或本节前言）.

2994. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

**解** 由 $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2\left(\sum_{n_1=1}^{2N+1} \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2}\sum_{n_2=1}^{N} \frac{1}{n_2} - 1\right)$$

$$= (C + \ln N + \varepsilon_1) - 2[(C + \ln(2N+1) + \varepsilon_2) - \frac{1}{2}(C + \ln N + \varepsilon_3) - 1]^{*)}$$

$$= 2\ln \frac{N}{2N+1} + \alpha + 2,$$

其中 $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0, \varepsilon_3 \to 0, \alpha = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \to 0$

（当 $N \to \infty$）.

于是

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(2n+1)} = 2\ln \frac{1}{2} + 2 = 2(1 - \ln 2),$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2(1 - \ln 2).$$

*）利用 146 题的结果．

2995. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{n!}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left\{1+2+\sum_{n=3}^{N}\frac{n^2}{n!}\right\}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left\{3+\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}\right)\right\}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left\{3+\sum_{k=2}^{N-1}\frac{1}{k!}+\sum_{l=1}^{N-2}\frac{1}{l!}\right\}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left\{2\left(1+\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{s!}\right)+O\left(\frac{1}{N}\right)\right\}$$
$$=2e.$$

2996. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}$.

解 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$
$$=2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{m!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

利用级数运算的性质可知，对于绝对收敛的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$，有下述等式：
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n,$$
其中 $d_n=\sum_{k+l=n}\frac{1}{k!l!}=\frac{1}{n!}\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!l!}$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}C_n^s=\frac{2^n}{n!},$$

故得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\right)^2=e^2,$$

因此，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n!}=3e^2.$$

**2997.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

**解** 由$\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n(n+1)}$,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{\pi^2}{6}+\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)-2^{*)}=\frac{\pi^2}{3}-3.$$

*）利用 2549 题及 2961 题的结果.

**2998.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

**解** 首先，注意到

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{n^2}+\frac{6}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=-\frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2}-\frac{12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \tag{1}$$

$$2\left[\frac{1}{n^2(n+1)^2}+\frac{1}{n^2(n+1)^2}-\frac{2}{(n+1)^2(n+2)^2}\right]$$

$$=\frac{12n+10}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{2}{n(n+2)}=\frac{4}{n^2(n+2)^2} \qquad (3)$$

将(1)、(2)、(3)三式相加，合并整理可得

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n(n+2)}$$
$$+\frac{6}{n(n+1)(n+2)}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$+\frac{2}{n^2(n+1)^2}$$
$$=\frac{2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}.$$

其次，先后利用 2961 题、2990 题、2987 题和 2997 题的结果，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right.$$
$$+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$
$$+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-1-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+6\cdot\frac{1}{4}-\left(\frac{\pi^2}{3}-3-\frac{1}{4}\right)$$
$$\left.+2\left(\frac{\pi^2}{3}-3\right)\right\}$$
$$=\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}.$$

**2999.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

**解** 注意到

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right),$$

$$\frac{2}{5!}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

相加即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]^{*)}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1).$$

*）由于级数绝对收敛，从而其和与项相加的顺序无关.

3000.+ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

**解** 考虑部分和

$$S_N=\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$$

$$=\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{3}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{1}{3}\sum_{l=4}^{N+2}\frac{(-1)^{l+1}}{l}$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{3}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

故得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n-2} = \lim_{N\to\infty}S_N = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}$$

$$= \frac{1}{18}(12\ln 2 - 5).$$

3001. 设 $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$$

的和.

**解** 令 $P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_m n^m$

$$\equiv \alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_m n(n-1)\cdots(n-m+1),$$

其中 $\alpha_i (i = 0,1,\cdots,m)$ 可由上述恒等式求出,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots + \alpha_m n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!}x^n$$

$$= \alpha_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \alpha_1 x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \alpha_m x^m\cdot\sum_{n=m}^{\infty}\frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$= \alpha_0 e^x + \alpha_1 x e^x + \cdots + \alpha_m x^m e^x$$

3003. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$.

**解** 由$\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}(-x)^n$$

$$= \frac{1}{2}(-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)!}$$

$$= -\frac{x}{2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= -\frac{x}{2} + x^2 e^{-x} (e^{-x} - 1 + x) + \frac{1}{x}\left(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!}\right)$$

$$= e^{-x}\left(x^2 + 1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}.$$

3004. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}$.

**解** 由$\frac{2n^2+1}{(2n)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!}$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-2)!} x^{2n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$=1-\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}x^{2n-2}-\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}-1$$

$$=1-\frac{x^2}{2}\cos x-\frac{x}{2}\sin x+\cos x-1$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x.$$

**3005.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{(2n+1)!}$.

**解** 1)若 $x=0$,则级数的和显然为零.

2)若 $x>0$,记 $t=\sqrt{x}$. 考虑部分和,并注意:当任意固定 $x$ 时,某些常见幂级数的收敛性,下述记号$O(1)$是指当 $N\to\infty$时的无穷小. 于是有

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{n^2t^{2n}}{(2n+1)!}=\frac{1}{4t}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n)^2-1}{(2n+1)!}t^{2n+1}$$

$$+\frac{1}{4t}\sum_{n=0}^{N}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$=\frac{1}{4t}\sum_{n=0}^{N}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!}t^{2n+1}+\frac{1}{4t}\operatorname{sh}t+o(1)$$

$$=\frac{1}{4t}\left(t^2\sum_{n=1}^{N}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}-t\sum_{n=0}^{N}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)+\frac{1}{4t}\operatorname{sh}t+o(1)$$

$$=\frac{1}{4t}(t^2\operatorname{sh}t-t\operatorname{ch}t+o(1))+\frac{1}{4t}\operatorname{sh}t+o(1)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{t^2+1}{t}\operatorname{sh}t-\operatorname{ch}t\right)+o(1)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)+o(1).$$

因此,当 $x>0$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\text{sh}\ \sqrt{x} - \text{ch}\ \sqrt{x}\right).$$

3)若 $x<0$,记 $y=\sqrt{|x|}$,则 $x=-y^2$. 与上述讨论类似,有

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{n^2(-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n[(2n)^2-1]}{(2n+1)!}y^{2n+1} \\
&\quad + \frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{4y}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!}y^{2n+1} \\
&\quad + \frac{1}{4y}\sin y + o(1) \\
&= \frac{1}{4y}\left\{y^2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n y^{2n-1}}{(2n-1)!} - y\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{4y}\sin y + o(1) \\
&= \frac{1}{4y}[-y^2\sin y - y\cos y + o(1)] + \frac{1}{4y}\sin y + o(1) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{-y^2+1}{y}\sin y - \cos y\right) + o(1) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} - \sin\ \sqrt{|x|} - \cos\ \sqrt{|x|}\right) + o(1).
\end{aligned}$$

因此,当 $x<0$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} \lim_{N\to\infty} S_N$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\sin\ \sqrt{|x|} - \cos\ \sqrt{|x|}\right).$$

利用逐项微分法求级数的和：

3006. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

**解** 由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{N\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，故收敛半径为1. 当$x=1$时，级数发散；当$x=-1$时，级数收敛. 因此，级数的收敛域为$[-1,1)$.

当$x\in[-1,1)$时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

当$|x|<1$时，逐项微分之，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

由于$f(0)=0$，故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=\ln\frac{1}{1-x}(|x|<1).\quad(1)$$

由上述幂级数在$x=-1$的收敛性，且其和为$-\ln 2=\ln\frac{1}{2}$，利用亚伯耳定理知，上述结果(1)当$-1\leqslant x<1$时成立.

3007. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$.

**解** 由$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)}=1$，故收敛半径为1. 当$|x|=1$时，级数绝对收敛. 因此，级数的收敛域为$[-1,1]$.

当$x\in[-1,1]$时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

当 $|x|<1$ 时,逐项微分之,得

$$f'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}=2\text{arctg}x^{*)}.$$

由于 $f(0)=0$,故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=2\int_0^x \text{arctg}t dt$$

$$=2x\text{arctg}x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt$$

$$=2x\text{arctg}x-\ln(1+x^2). \tag{1}$$

当 $|x|=1$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{4}^{**)}-\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{2}-\ln^2,$$

利用亚伯耳定理知,上述结果(1) 包括端点在内也成立,即当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,(1) 式成立.

*) 利用 2907 题的结果.

**) 利用 2938 题的结果.

3008. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

**解** 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+1}=1$,故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时,级数发散. 因此,级数的收敛域为 $(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时,令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4^{n+1}}.$$

逐项微分之，得

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}.$$

由于　$f(0)=0$，故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt$$

$$=\int_0^x\frac{dt}{1-t^4}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x \qquad (|x|<1).$$

3009. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n \qquad (d>0).$

**解**　首先，应设

$$a\neq -md \quad (m=0,1,2,\cdots),$$

因为否则，若 $a=-md$ （$m$——某正整数或零），则原级数从 $m+1$ 项开始恒为零，此时原级数为一多项式

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n,$$

它对任何 $x$ 均收敛．

令

$$a_n=\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)d}{a+nd}=1,$$

故收敛半径为 1．以下先设 $|x|<1$ 求原级数的和，最后再考虑端点 $x=\pm 1$ 时的情形．

当 $x \in (-1,1)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n.$$

逐项微分之，得，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot d\cdot 2d\cdots(n-1)d}x^{n-1}.$$

以 $(1-x)$ 乘上式两端，得 $(1-x)f'(x)$

$$=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\cdots nd}x^n$$

$$=\frac{a}{d}+\frac{a}{d}f(x).$$

上述方程系一阶线性方程：

$$f'(x)-\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{1-x}f(x)=\frac{a}{d}\cdot\frac{1}{1-x}.$$

解之，得

$$f(x)=C(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1\quad(-1<x<1),$$

其中 C 为常数．由于 $f(0)=0$，故得 $0=C-1$，即 $C=1$．于是，当 $|x|<1$ 时，

$$f(x)=(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1. \tag{1}$$

最后，考虑端点 $x=\pm1$ 的情形，先考虑 $x=1$．此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$．由于当 n 充分大时，$a+nd>0$，故

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(d-a)n}{a+nd}=\frac{d-a}{d}.$$

于是，根据拉阿伯判别法可知，当 $a<0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，当 $a>0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散；但当 $a>0$ 时，$a_n>0$．由此可知：当 $a<0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $a>0$

时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

再考虑 $x=-1$. 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. 当 $a<0$ 时,前面已证 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

下设 $a>0$,若 $a \geqslant d$,则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)d}{a+nd} \leqslant 1,$$

故

$$a_{n+1} \geqslant a_n>0 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

于是,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 的通项不趋于零,因此它发散.

下设 $0<a<d$. 于是有

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a+(k-1)d}{kd}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right).\end{aligned} \tag{2}$$

由于 $0<a<d$,故 $\ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)<0 (k=1,2,3,\cdots)$.

注意到

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right) \Big/ \left(-\frac{d-a}{kd}\right)=1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散,即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)$ 发散,从而(它的每一项都是负的)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{d-a}{kd}\right)=-\infty.$$

于是,根据(2)式即知

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{3}$$

另外，因 $0 < a < d$，有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} > 1,$$

故

$$a_n > a_{n+1} > 0 \qquad (n = 1,2,3,\cdots). \tag{4}$$

于是，由(3)式及(4)式，根据莱布尼兹判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

综上所述，并根据幂级数的亚伯耳定理，即知：当 $a<0$ 时，原幂级数的收敛域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$，且在其上，公式(1)成立；当 $0<a<d$ 时，原幂级数的收敛域为 $-1\leqslant x<1$，且在其上，公式(1)成立；当 $a\geqslant d$ 时，原幂级数的收敛域为 $-1<x<1$，且在其上，公式(1)成立.

3010. $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots$.

**解** 记 $a_n=\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}\cdot\frac{1}{2^n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3n+3)}{3n+1}=2,$$

故收敛半径为 2. 先对 $|x|<2$ 求级数的和，然后再考虑端点 $x=\pm 2$ 的情况.

当 $x\in(-2,2)$ 时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

逐项微分之，得

由于$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{3n+3}{3n+1}>1$，
故

$$b_n>b_{n+1}>0 \qquad (n=1,2,3,\cdots). \tag{2}$$

另外，

$$\ln b_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{3k-2}{3k}=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right).$$

由于 $\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)<0 \qquad (k=1,2,3,\cdots)$，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)}{-\frac{2}{3k}}=1,$$

而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，故级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)$发散，并且

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{3k}\right)=-\infty.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\ln b_n=-\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0. \tag{3}$$

由(2)式及(3)式，根据莱布尼兹判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$收敛．

综上所述，并利用幂级数的亚伯耳定理，即知：原幂级数的收敛域为$-2\leqslant x<2$，且在其上，公式(1)成立．

利用逐项积分法求级数的和：

3011. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$.

**解** 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$,故收敛半径为1. 当 $|x|=1$ 时,由于 $n^2\to\infty$,故级数发散. 因此,级数的收敛域为$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$时,令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

逐项积分之,得

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2 t^{n-1}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

于是,当 $|x|<1$ 时,

$$f(x)=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

*)利用 2911 题的结果.

3012. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

**解** 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}=1$,故收敛半径为1. 当 $|x|=1$ 时,由于 $n(n+2)\to\infty$,故级数发散. 因此,级数的收敛域为$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$时,令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}$$

$$=xg(x),$$

其中 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$. 由于

$$G(x)=\int_0^x g(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)\int_0^x t^{n-1}dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$=\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)}+\frac{2x}{1-x}=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}$$

故 $g(x)=[G(x)]'=\left(\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3}$. 因此，当 $|x|<1$ 时，

$$f(x)=xg(x)=\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}.$$

*)利用 2911 题的结果.

3013. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

**解** 由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3}=+\infty$，故级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

逐项积分之，得

$$\int_0^x f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n+1)t^{2n}}{n!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}$$

$$=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}.$$

于是，当 $|x|<+\infty$时，

$$f(x)=(xe^{x^2})'=e^{x^2}(1+2x^2).$$

注　本题也可直接求级数的和．事实上，

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}\right]x^{2n}$$

$$=1+2x^2e^{x^2}+(e^{x^2}-1)$$

$$=e^{x^2}(1+2x^2).$$

对于本题，还可用逐项微分法求级数的和．事实上，

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(2n+1)}{(n-1)!}x^{2n-1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[2(n-1)+1]+2}{(n-1)!}x^{2(n-1)+1}$$

$$=2x\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2m+1}{m!}x^{2m}+4x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!}$$

$$=2xf(x)+4xe^{x^2},$$

解一阶线性微分方程

$$f'(x)-2xf(x)=4xe^{x^2},$$

得

$$f(x)=e^{x^2}(2x^2+C).$$

由于 $f(0)=1$，故得 $1=1(2\cdot 0+C)$，即 $C=1$，于是，当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，

$$f(x)=e^{x^2}(2x^2+1).$$

利用亚伯耳方法，求下列级数的和：

**3014.** $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$.

**解**　级数

$$x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$$

的收敛域为$(-1,1]$. 当$|x|<1$时,令

$$f(x)=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots.$$

逐项微分之,得

$$f'(x)=1-x^3+x^6-x^9+\cdots=\frac{1}{1+x^3}.$$

由于$f(0)=0$,故有

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}{}^{*)}$$

$$+\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \qquad (-1<x<1).$$

由亚伯耳定理,即得

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\lim_{x\to1-0}f(x)$$

$$=f(1)=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{\sqrt[3]{3}}.$$

*)利用1881题的结果.

**3015.** $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$

**解** 级数

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

的收敛域为$[-1,1]$,利用2907题的结果知,当$x\in(-1,1)$时,有

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots.$$

由亚伯耳定理,即得

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\lim_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}x$$

$$=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

3016. $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$.

**解** 级数

$$1-\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

的收敛域为$(-1,1]$. 利用 2910 题的结果知,当 $x\in(-1,1)$时,有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots.$$

由亚伯耳定理,即得

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3017. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots$.

**解** 级数

$$x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots$$

的收敛域为$[-1,1]$. 利用 2870 题的结果知,当 $x\in(-1,1)$时,有

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots.$$

由亚伯耳定理,即得

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\arcsin x=\frac{\pi}{2}.$$

求下列三角级数的和:

3018. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

**解** 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z},$$

其中 $z=e^{ix}$，以及

$$\ln\frac{1}{1-z}=-\ln(1-\cos x-i\sin x)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos x)+i\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}\ ^{*)}$$

$$=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|+i\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x} \qquad (1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \qquad (2)$$

比较(1)，(2)两式实数部分及虚数部分，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| \quad (0<x<2\pi) \qquad (3)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-x}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi-x}{2}(0<x<2\pi).$$

*)其中用到 $\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z$.

若 $z=x+iy$，则 $\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，而 $\arg z=$

$\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

3019. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$.

**解** 参看 3018 题中的结果(3).

3020. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha\sin nx}{n}$.

**解** 利用积化和差公式及 3019 题的结果,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha\sin nx}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-\alpha)}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x+\alpha)}{n}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|2\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|2\sin\frac{x+\alpha}{2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\dfrac{x+\alpha}{2}}{\sin\dfrac{x-\alpha}{2}}\right|,$$

上式的存在域为 $0<x-\alpha<2\pi$ 及 $0<x+\alpha<2\pi$ 的公共部分,可视 $\alpha$ 之正负号而定:当 $\alpha>0$ 时为 $\alpha<x<2\pi-\alpha$;当 $\alpha<0$ 时为 $-\alpha<x<2\pi+\alpha$.

3021. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}\quad\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**解** 利用半角公式、积化和差公式以及 3018 题的结果,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\alpha\sin nx}{n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+2\alpha)}{n}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-2\alpha)}{n}.$$

下面分三种情况求此级数的和 $S$：

(1)取 $0<x<2\pi$,$0<x-2\alpha<2\pi$ 与 $0<x+2\alpha<2\pi$ 的公共部分，即 $2\alpha<x<2\pi-2\alpha$. 此时，级数的和为

$$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}$$

$$=0$$

(2)当 $0<x<2\alpha$ 时，

$$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}+\frac{\pi-(2\alpha-x)}{8}$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$

(3)当 $2\pi-2\alpha<x<2\pi$ 时，

$$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha-2\pi)}{8}{}^{*)}$$

$$-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}=-\frac{\pi}{4}.$$

*)由于 $2\pi<x+2\alpha<3\pi$，故可令

$$x+2\alpha=2\pi+\theta \qquad (0<\theta<\pi),$$

则有

$$\sin n(x+2\alpha)=\sin n(2\pi+\theta)=\sin n\theta,$$

从而以 $\theta=x+2\alpha-2\pi$ 代替 3018 题的结果中的 $x$ 即可.

**3022.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

**解** 记

中令 $z=-e^{ix}$，并注意幅角主值的取法，就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}=-\frac{x}{2}\qquad(|x|<\pi)\qquad(1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right).\qquad(2)$$

由于

$$\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right),$$

故有

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n+1}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(m+1)x}{m}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos(m-1)x}{m}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m}[\cos(m-1)x$$

$$-\cos(m+1)x]-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m}\sin mx\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin x\qquad(|x|<\pi).$$

3024. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

**解** 记

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},$$

显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致收敛，故 $F(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，而且是以 $2\pi$ 为周期的周期函数．因此，只要求 $F(x)$ 在 $|x|\leqslant\pi$ 上的值．易知

$$2\sin x\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=1-\cos 2nx.$$

故当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ $\left(0<\tau<\frac{\pi}{2}\text{是任意的}\right)$ 时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k-1)x\right|\leqslant\frac{1}{\sin\tau}.$$

于是，根据迪里黑里判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ 上一致收敛．从而，由逐项求导数法则知：当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ 时，有

$$F'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{\pi}{4}{}^{*)}.\qquad(1)$$

由 $\tau$ 的任意性知(1)式当 $0<x<\pi$ 时成立．于是，

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+C\qquad(0<x<\pi)\qquad(2)$$

其中 $C$ 是某常数．由 $F(x)$ 在 $x=0$ 的连续性以及

$$F(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}{}^{**)},$$

在(2)式中令 $x\to+0$ 取极限，即得 $C=\frac{\pi^2}{8}$，于是

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi^2}{8}(0\leqslant x<\pi).$$

由此，再注意到 $F(x)$是偶函数及连续函数，得

$$F(x)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x| \qquad (|x|\leqslant\pi).$$

*)利用 3022 题的结果．

**)利用 2961 题的结果．

3025. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

**解** 由于

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

故得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n+1}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin(m-1)x}{m}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin mx}{m}\cos x$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos mx}{m}\sin x$$

$$=-(1+\cos x)\left(-\frac{x}{2}\right)-\sin x\cdot\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{*)}$$

$$=\frac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\cdot\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$(|x|<\pi)$$

*)利用解 3023 题时的(1)、(2)两式．

3026. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$

**解** 令 $z=e^{ix}$，考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z.$$

注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!},$$

$$e^z=e^{\cos x+i\sin x}$$

$$=e^{\cos x}[\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)],$$

故按实部和虚部分别各自相等的关系，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}=e^{\cos x}\cos(\sin x)\qquad(|x|<+\infty).$$

3027. 作曲线

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2}=0$$

的图形

**解** 记

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2},$$

注意到 $f(x,y)$ 对 $x$、$y$ 分别均为以 $2\pi$ 为周期的周期函数，故可考虑下列定义域：

$$R=\{0\leqslant x<2\pi,0\leqslant y<2\pi\},$$

为研究 $f(x,y)=0$ 的图形，要用到下列函数：

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{n^2}\qquad(|t|<+\infty).$$

为求 $g(t)$，考虑 $g'(t)$，仿 3024 题的办法可知可逐项求导数，再注意到 3022 题求解过程中的关系，有

$$g'(t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}$$

$$=-(\operatorname{sgn}t)\frac{\pi-|t|}{2} \qquad (0<|t|<2\pi).$$

注意常数 $g(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，于是得

$$g(t)=g(0)+\int_0^t g'(t)dt$$
$$=g(0)-\frac{\pi}{2}|t|+\frac{1}{4}t^2.$$

由于

$$\sin nx\cdot\sin ny=\frac{1}{2}[\cos n(x-y)-\cos n(x+y)],$$

故得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(x-y)-\cos n(x+y)}{n^2}$$
$$=\frac{1}{2}[g(x-y)-g(x+y)]$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left[g(0)-\frac{\pi}{2}|x-y|+\frac{1}{4}(x-y)^2\right]-\left[g(0)-\frac{\pi}{2}|x+y|+\frac{1}{4}(x+y)^2\right]\right\}$$
$$=\frac{\pi}{4}(|x+y|-|x-y|)+\frac{1}{8}[(x-y)^2-(x+y)^2]$$
$$=\frac{\pi}{4}\cdot 2\min\{x,y\}+\frac{1}{8}(-4xy)$$
$$=\frac{1}{2}[\pi-\max\{x,y\}]\cdot\min\{x,y\}.$$

若 $x\leqslant y$，则令 $f(x,y)=0$，$(x,y)\in R$，有

$$x(\pi-y)=0,$$

得 $x=0$ 或 $y=\pi$. 若 $x\geqslant y$，则令 $f(x,y)=0$，

$(x,y)\in R$,有

$$y(\pi-x)=0,$$

得 $y=0$ 或 $x=\pi$. 因此,在 $R$ 内,$x=0,x=\pi;y=0$, $y=\pi$ 诸直线是满足 $f(x,y)=0$ 的图形.

又根据 $f(x,y)$的表达式知,图形必然是按 $x$ 及按 $y$ 以 $2\pi$ 为周期的周期曲线,故得

$$x=l\pi,l=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

$$y=m\pi,m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

诸直线均为 $f(x,y)=0$ 的图形,且除此而外,均有 $f(x,y)\neq0$,即不是 $f(x,y)=0$ 的图象. 因此,$f(x,y)=0$ 的图形即为上述所指的两族直线组. 由于这是两族分别与坐标轴平行且相距为 $\pi$ 的直线族,它们的图形已为大家所熟知,故省略.

求下列级数的和:

**3028.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}(2x)^{2n+2}\Big/\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2x^2}{(2n+2)(2n+1)}=x^2,$$

故原幂级数当 $|x|<1$ 时收敛,当 $|x|>1$ 时发散,即其收敛区间为$(-1,1)$. 当 $|x|=1$,原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2 4^n}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

由于

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{3n+1}{2n}\to\frac{3}{2}>1\qquad(n\to\infty),$$

故由拉阿伯判别法知，当$|x|=1$时原幂级数也收敛．因此，原幂级数当$-1\leqslant x\leqslant 1$时一致收敛．从而其和函数$f(x)$是$-1\leqslant x\leqslant 1$上的连续函数，且在$-1<x<1$上可逐项微分，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n(2x)^{2n-1}$$

$$(-1<x<1),$$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}$$

$$(-1<x<1).$$

于是

$$-xf(x)+(1-x^2)f''(x)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2x)^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}$$

$$\cdot 8n(2n-1)(2x)^{2n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}2n(2n-1)(2x)^{2n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n^2(2x)^{2n}+4$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}8n(2n-1)(2x)^{2n-2}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n^2(2x)^{2n}+4$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n}=4$$

$$(-1<x<1).$$

因此

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x)+\sqrt{1-x^2}f''(x)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1),$$

两端积分，得

$$\sqrt{1-x^2}f'(x)=4\arcsin x+C \qquad (-1<x<1).$$

由 $f(0)=0$，得 $C=0$，从而

$$f'(x)=\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1).$$

两端再积分，得

$$f(x)=2(\arcsin x)^2+C_1 \qquad (-1<x<1).$$

再由 $f(0)=0$，得 $C_1=0$. 于是，有

$$f(x)=2(\arcsin x)^2 \qquad (-1<x<1).$$

再注意到上式两端都是 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的连续函数，通过取极限，即知上式当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时也成立，故最后得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}=2(\arcsin x)^2 \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

3029. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

**解** 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\bigg/\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{4},$$

故原幂级数的收敛半径等于 4，即它当 $|x|<4$ 时收敛，当 $|x|>4$ 时发散. 当 $x=\pm 4$ 时，原幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n. \qquad (1)$$

由于

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{2n+2}{2n+1}>1,$$

故 $|a_{n+1}|>|a_n|\quad(n=0,1,\cdots)$，因此 $a_n$ 不趋于零，从而级数(1)发散.于是，原幂级数仅当 $|x|<4$ 时收敛，下面分两种情形讨论：

当 $0\leqslant x<4$ 时，令 $x=(2t)^2$，$0\leqslant t<1$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(2t)^{2n}$$
$$=F(t)\quad(0\leqslant t<1).$$

由直接计算，易知

$$(1-t^2)F(t)-1=\frac{t}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}4n(2t)^{2n-1}$$
$$(0\leqslant t<1).$$

利用 3028 题的结果，得

$$(1-t^2)F(t)-1=\frac{t}{4}[2(\arcsin t)^2]'$$
$$=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\qquad(0\leqslant t<1),$$

从而

$$F(t)=\frac{1}{1-t^2}\left(1+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\right)$$
$$(0\leqslant t<1).$$

将 $t=\frac{\sqrt{x}}{2}$ 代入，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\frac{4}{4-x}+\frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$$
$$(0\leqslant x<4).$$

现设 $-4<x<0$. 令

$$x=-(2t)^2,\ 0<t<1.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n^2(2t)^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n+2)!}2(n+1)(2n+1)(2t)^{2n}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}n^2(2t)^{2n}$$

$$=1\qquad(-1<t<1),$$

即

$$\sqrt{1+t^2}g'(t)+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}g(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\qquad(-1<t<1).$$

两端积分，得

$$\sqrt{1+t^2}g(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2})+C\qquad(-1<t<1).$$

由 $g(0)=0$，知 $C=0$，故

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\qquad(-1<t<1).$$

于是，根据关系式

$$G(t)=\frac{1}{1+t^2}[1-t\cdot g(t)]\qquad(0<t<1),$$

再将 $t=\frac{\sqrt{-x}}{2}=\frac{\sqrt{|x|}}{2}$ 代入，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\frac{4}{4-x}-\frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{|x|}+\sqrt{4-x}}{2}\right)\qquad(-4<x<0).$$

**3030.** $\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots.$

**解** 显然，要使本题有意义，首先要假定 $x$ 不是负整数. 记

$$s_n=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$
$$(n=1,2,3,\cdots).$$

为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}s_n$ 的收敛性及其和，注意当 $x\neq 1$ 时，有关系式

$$\frac{1}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}(1+\frac{2}{x-1})$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x-1}$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}(\frac{x+2}{x-1})$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{x+2}\cdot\frac{3}{x-1}$$
$$=\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$
$$+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}\cdot\frac{4}{x-1}$$
$$=\cdots$$
$$=\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$$
$$+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}+\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$
$$\cdot\frac{n+1}{x-1}=s_1+s_2+\cdots+s_n+R_n, \tag{1}$$

其中

$$R_n=s_n\cdot\frac{n+1}{x-1}=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{x+k}$$
$$=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}}=\frac{1}{x-1}\prod_{k=1}^{n}(1+a_k),$$

这里(当 $k$ 充分大时)

$$\alpha_k = \frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{x}{k}} - 1 = (1+\frac{1}{k})(1+\frac{x}{k})^{-1} - 1$$

$$= \frac{1-x}{k} + O(\frac{1}{k^2}). \tag{2}$$

由(1)式知,为研究 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$,就是要研究 $R_n$ 有无极限.若 $R_n$ 有极限为 $\tau$,则由(1)得

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{x-1} - R_n) = \frac{1}{x-1} - \tau.$$

令 $u_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha_n)$. 分两种情形讨论:

若 $x>1$,这时

$$0<1+\alpha_k=\frac{k+1}{x+k}<1 \qquad (k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k),\ \ln(1+\alpha_k)<0,$$

$$\alpha_k<0 \quad (k=1,2,3,\cdots),\alpha_k\to 0. \tag{3}$$

由(2)式与(3)式并注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收敛,$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散知:$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = -\infty$. 于是,根据

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + \alpha_k)}{\alpha_k} = 1$$

即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k)$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k) = -\infty$.

由此知

$$\lim_{n\to\infty}\ln u_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}u_n = 0,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}R_n = 0,$$

故 $$\sum_{k=1}^{\infty}s_k = \frac{1}{x-1}.$$

若 $x<1$. 注意，已设 $x$ 不是负整数. 另外，当 $x=0$ 时原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty}1$，显然发散，故可设 $-m<x<-m+1$，其中 $m$ 是某非负整数. 于是

$$1+a_k = \frac{k+1}{x+k} < 0 (k=1,2,\cdots,m-1),$$

$$1+a_k = \frac{k+1}{x+k} > 0 (k=m,m+1,\cdots).$$

令 $v_n = \prod_{k=m}^{n}(1+a_k) \quad (n=m,m+1,\cdots)$，则

$$\ln v_n = \sum_{k=m}^{n}\ln(1+a_k) \quad (n=m,m+1,\cdots).$$

根据(2)式知，当 $k$ 充分大时 $a_k>0$ 并且级数 $\sum_{k=m}^{\infty}a_k$ 发散. 仿照前面的论述可知级数 $\sum_{k=m}^{\infty}\ln(1+a_k)$ 发散，且 $\sum_{k=m}^{\infty}\ln(1+a_k)=+\infty$. 从而当 $n\to\infty$ 时，$\ln v_n\to+\infty$，$v_n\to+\infty$；由此可知

$$\lim_{n\to\infty}R_n = \pm\infty,$$

其中的正、负号随$m$是$2,4,6,\cdots$之一或$0,1,3,5,\cdots$之一而定.由此可知,此时$\sum\limits_{k=1}^{\infty}s_n$发散.

另外,若$x=1$,原级数为$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$,显然发散.

综上所述,可知原级数仅当$x>1$时收敛,且此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}=\frac{1}{x-1}.$$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots$在$x>0,a_n>0(n=1,2,\cdots)$同级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$发散的条件下.

**解** 记

$$s_n=\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_n}{a_{n+1}+x}(n=1,2,3,\cdots).$$

注意条件$x>0,a_n>0$,我们有

$$\frac{a_1}{x}=\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2+x}{x}=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{x}$$

$$=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdot\frac{a_3}{x}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\cdots+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+x}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_n+x}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}+x}\cdot\frac{a_{n+1}}{x}=s_1+s_2+\cdots+s_n+R_n, \quad (1)$$

其中

$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{a_{n+1}}{x}s_n = \frac{a_1}{x}\cdot\frac{a_2}{a_2+x}\cdot\frac{a_3}{a_3+x}\cdots\frac{a_n}{a_n+x}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+x} \\
&= \frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}\frac{a_k}{a_k+x} = \frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{x}{a_k+x}\right) \\
&= \frac{a_1}{x}\prod_{k=2}^{n+1}(1+\alpha_k),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

这里

$$
\alpha_k = -\frac{x}{a_k+x} \quad (k=2,3,\cdots,n+1). \tag{3}
$$

由(1)知，为研究原级数$\sum_{n=1}^{\infty}s_n$，就是要研究 $R_n$ 有无极限. 若 $R_n$ 有极限 $r$，则由(1)得

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}s_k &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}s_k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{x}-R_n\right) \\
&= \frac{a_1}{x}-r.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

下面我们证明 $R_n$ 有极限 $r=0$. 显然

$$
-1<\alpha_k<0,\ 0<1+\alpha_k<1 \quad (k=2,3,\cdots).
$$

令 $u_n=\prod_{k=2}^{n+1}(1+\alpha_k)$，则

$$
\ln u_n = \sum_{k=2}^{n+1}\ln(1+\alpha_k).
$$

易知正项级数

$$
\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{a_k+x}
$$

是发散的. 事实上，由$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$的发散性，可将 $a_k$ 分为以下情况来讨论：1) 若 $a_k\geqslant x(k=2,3,\cdots)$，则

$$a_k + x \leqslant 2a_k \text{ 即} \frac{1}{a_k + x} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_k}.$$

由 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 发散(无界)便知 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散. 2)若除有限个 $a_k$ 之外均有 $a_k \geqslant x$($k$ 取除了某些有限个正整数以外的所有自然数),则仍有上述结论. 3)若存在一个叙列 $a_{k_i}$ 使得 $a_{k_i} < x(i = 1,2,3. \cdots)$,则我们有

$$a_{k_i} + x < 2x \text{ 即} \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{1}{2x}(i = 1,2,\cdots).$$

显然,有

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{N}{2x} \to +\infty \qquad (\text{当 } N \to \infty),$$

于是,级数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散.

从而

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x} = +\infty, \sum_{k=2}^{\infty} a_k = -\infty.$$

注意到 $-1 < a_k < 0$,

$$\ln(1 + a_k) < a_k < 0 \quad (k = 2,3,\cdots),$$

可知

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 + a_k) = -\infty.$$

由此可知,当 $n \to \infty$ 时,

$$\ln u_n \to -\infty, u_n \to 0, R_n \to 0.$$

于是原级数收敛,且

$$\frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{a_1}{a_2 + x} \cdot \frac{a_2}{a_3 + x} + \cdots = \frac{a_1}{x}.$$

3032*). $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots$,若(a) $|x| < 1$;

(б) $|x|>1$.

**解** 记

$$s_n=\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}(n=0,1,2,\cdots;\ |x|\neq 1).$$

注意，当 $|x|\neq 1$ 时，有公式

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x}&=\frac{x}{1-x^2}(1+x)=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}\\
&=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}(1+x^2)\\
&=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^4}=\cdots\\
&=\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\cdots+\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}+\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}\\
&=s_1+s_2+\cdots+s_n+R_n,
\end{aligned}$$

其中

$$R_n=\frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

上述恒等式对任何 $n$ 均成立. 为求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}s_n$，我们分两种情况予以处理：

(a) 当 $|x|<1$ 时，显然

$$R_n=\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}}\to 0(n\to\infty).$$

于是得

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x}{1-x}-R_N\right)=\frac{x}{1-x}.$$

(б) 当 $|x|>1$ 时，由

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2^{n+1}}=0$$

得

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{2n+1}}{1-|x|^{2n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2^{n+1}}-1}\right\}$$

$$=-1.$$

从而得

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{x}{1-x}-R_N\right)$$

$$=\frac{x}{1-x}+1=\frac{1}{1-x}.$$

*）本题第三项前原题为减号，应为加号.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$，若(a)$|x|<1$；(6)$|x|>1$.

**解** 记

$$s_n=\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}\quad(n=1,2,\cdots;|x|\neq 1).$$

考虑

$$\frac{1}{1-x^n}-\frac{1}{1-x^{n+1}}=\frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}$$

$$\cdot\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}s_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1-x}{x}s_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{N+1}},$$

$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=1.^{**)}$$

*)由于幂级数(收敛半径为1)

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

当 $x=1$ 时发散,故在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上逐项积分的合理性要单独证明,今证如下:

对任何 $0<\tau<1$,有

$$\int_0^\tau \ln(1-x)dx$$

$$=\int_0^\tau \left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)dx+R_n, \tag{1}$$

其中

$$R_n=\int_0^\tau \left(-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}-\cdots\right)dx.$$

由于 $0<\tau<1$,故可在 $0\leqslant x\leqslant \tau$ 上逐项积分,得

$$0>R_n=-\left[\frac{\tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{\tau^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$>-\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$=-\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots\right]$$

$$=-\frac{1}{n+1}.$$

于是,由(1)式知

$$\left|\int_0^\tau \ln(1-x)dx-\left(-\frac{\tau^2}{1\cdot 2}-\frac{\tau^3}{2\cdot 3}-\cdots\frac{\tau^{n+1}}{n(n+1)}\right)\right|$$

$$<\frac{1}{n+1}. \tag{2}$$

在(2)式中让 $n$ 固定而令 $\tau\to 1-0$ 取极限(注意,瑕积分 $\int_0^1 \ln(1-x)dx$ 显然收敛),得

$$\left|\int_0^1 \ln(1-x)dx-\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots-\frac{1}{n(n+1)}\right)\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{n+1}\qquad(n=1,2,3,\cdots).$$

由此式即知

$$\int_0^1 \ln(1-x)dx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots-\frac{1}{n(n+1)}\right)$$
$$=-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\cdots,$$

也即

$$\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)dx$$
$$=\int_0^1(-x)dx+\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_0^1\left(-\frac{x^3}{3}\right)dx$$
$$+\cdots,$$

换句话说，逐项积分公式成立.

本节以下诸题中，凡有在端点发散的级数的逐项积分合理性问题，都可仿照上面类似地去证明，不再一一写出.

* * )利用 2549 题的结果.

3035. $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}dx$

**解** $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}dx$

$$=\int_0^1 \frac{x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}^{*)}}{x}dx$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

*)利用 2871 题的结果.

**3036.** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx.$

**解** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int_0^1 \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots}{x}dx$

$$=\int_0^1 (1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\cdots)dx=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots$$

$$=\frac{\pi^2}{12}^{*)}.$$

*)利用 2961 题的结果.

**3037.** $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)dx(p>0,q>0).$

**解** $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)dx$

$$=\int_0^1 x^{p-1}(-x^q-\frac{x^{2q}}{2}-\frac{x^{3q}}{3}-\cdots)dx$$

$$=-\int_0^1 (x^{p-1+q}+\frac{1}{2}x^{p+2q-1}+\frac{1}{3}x^{p+3q-1}+\cdots)dx$$

$$=-(\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+2q}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{p+3q}\cdot\frac{1}{3}+\cdots)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(p+nq)}.$$

**3038.** $\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)dx.$

**解** $\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)dx$

$$=-\int_0^1 \left(\ln x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)dx$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ln x\Big|_0^1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)^2}\Big|_0^1$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$=1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)^{*)}=2-\frac{\pi^2}{6}.$$

*)利用 2549 题及 2961 题的结果.

3039. $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}$.

**解** $$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}dx$$

$$=\int_0^{+\infty}xe^{-2\pi x}(1+e^{-2\pi x}+e^{-4\pi x}+\cdots)dx$$

$$=\left[-\frac{x}{2\pi}e^{-2\pi x}-\frac{1}{(2\pi)^2}e^{-2\pi x}\right]_0^{+\infty}$$

$$+\left[-\frac{x}{4\pi}e^{-4\pi x}-\frac{1}{(4\pi)^2}e^{-4\pi x}\right]_0^{+\infty}$$

$$+\left[-\frac{x}{6\pi}e^{-6\pi x}-\frac{1}{(6\pi)^2}e^{-6\pi x}\right]_0^{+\infty}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}^{*)}=\frac{1}{24}.$$

*)利用 2961 题的结果.

3040. $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^x+1}$

**解** $$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^x+1}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}dx}{1+e^{-x}}$$

$$=\int_0^{+\infty}xe^{-x}(1-e^{-x}+e^{-2x}-\cdots)dx$$

$$=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_0^{+\infty}-\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{2^2}e^{-2x}\right]_0^{+\infty}$$

$$+\left(-\frac{x}{3}e^{-3x}-\frac{1}{3^2}e^{-3x}\right)_0^{+\infty}-\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots=\frac{\pi^2}{12}{}^{*)}.$$

*)利用 2961 题的结果.

3041. 按模 $k(0\leqslant k<1)$的正整数幂展开第一型完全椭圆积分

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

**解** $F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{3}{8}k^4\sin^4\varphi+\frac{5}{16}k^6\sin^6\varphi$$

$$+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi+\cdots\Big)d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2k^{2n}\right\}^{*)}.$$

*)利用 2281 题的结果.

3042. 按模 $k(0\leqslant k<1)$的正整数幂展开第二型完全椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

**解** $E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\varphi\right\}d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}^{*)}.$$

*)利用 2281 题的结果.

3043. 利用按椭圆离心率的正整数幂展开的级数以表椭圆

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t \qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

的弧长.

**解** 设 $a>b$,则 $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$,$(\frac{b}{a})^2=1-\varepsilon^2$. 弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}dt$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\varepsilon^{2n}\cos^{2n}t\right\}dt$$

$$=4a\cdot\frac{\pi}{2}\left\{1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}\right\}$$

$$=2\pi a\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{\varepsilon^4}{3}-\cdots\right\}.$$

证明下列等式:

**3044.** $\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

**解** $$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\int_0^1 e^{-x\ln x}dx$$

$$=\int_0^1\left(1-x\ln x+\frac{1}{2!}x^2\ln^2 x-\frac{1}{3!}x^3\ln^3 x+\cdots\right)dx$$

$$=\Big[x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{2!\cdot 3}\ln^2 x-\frac{x^3}{3^2}\ln x+\frac{x^3}{3^3}$$

$$-\frac{x^4}{3!\cdot 4}\ln^3 x+\frac{x^4}{2\cdot 4^2}\ln^2 x-\frac{x^4}{4^3}\ln x+\frac{x^4}{4^4}$$

$$+\cdots\Big]_0^1$$

$$=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n},$$

本题得证.

3045. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax dx = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}$.

**解** $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax dx$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2n+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-t}[t^n+nt^{n-1}+n(n-1)t^{n-2}$$

$$+\cdots+n!t+n!]\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}.$$

本题得证.

3046⁺. $\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx dx = \frac{\pi}{n!}(n=0,1,2\cdots)$.

**解** 若复数 $w=u+iv$，记 $R\{w\}=u$ 为实部，则有

$$R\{e^{e^{ix}}\}=e^{\cos x}\cos(\sin x).$$

因此，原定积分为

$$I_n=\int_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx dx$$

$$=R\left\{\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\cos nx dx\right\}$$

$$=R\left\{\int_0^{2\pi} e^{e^{ix}}\cdot\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx})dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}R\left\{\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(e^{ix})^m}{m!}(e^{inx}+e^{-inx})dx\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{1}{m_1!}R\left\{\int_0^{2\pi}e^{i(m_1+n)x}dx\right\}$$

$$+\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{1}{m_2!}R\left\{\int_0^{2\pi}e^{i(m_2-n)x}dx\right\}\Big]$$

注意，对任意整数 $k$，有积分关系：

$$\int_0^{2\pi}e^{ikx}dx=\begin{cases}2\pi,\text{当 } k=0;\\0,\text{当 } k\neq 0.\end{cases}$$

从而，当 $n\geqslant 0, m\geqslant 0$ 时，有：

i)当 $n=0$ 时，

$$\int_0^{2\pi}e^{i(m+n)x}dx=\begin{cases}2\pi,\text{当 } m=0,\\0,\text{当 } m\neq 0;\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)x}dx=\begin{cases}2\pi,\text{当 } m=0,\\0,\text{当 } m\neq 0.\end{cases}$$

此时相应地得

$$I_0=\frac{1}{2}(2\pi+2\pi)=2\pi.$$

ii)当 $n=1,2,3,\cdots$时，

$$\int_0^{2\pi}e^{i(m+n)x}dx=0;$$

$$\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)x}dx=\begin{cases}2\pi,\text{当 } m=n,\\0,\text{当 } m\neq n.\end{cases}$$

此时相应地得

$$I_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n!}2\pi\right)=\frac{\pi}{n!}.$$

求：

**3047.** $\int_0^{2\pi}e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)dx$ （$n$ 是自然数）.

**解** 被积函数正是$e^{ae^{ix}-inx}$的实部，故积分为

$$I=\int_0^{2\pi}e^{a\cos x}\cos(a\sin x-nx)dx$$

$$=\int_0^{2\pi} R\{e^{ae^{ix}-inx}\}dx$$

$$=R\left\{\int_0^{2\pi} e^{ae^{ix}}e^{-inx}dx\right\}$$

$$=R\left\{\int_0^{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ae^{ix})^m}{m!}e^{-inx}dx\right\}$$

$$=R\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)x}dx\right\}$$

$$=R\left\{\frac{a^n}{n!}\cdot 2\pi+\sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)x}dx\right\}$$

$$=\frac{2\pi a^n}{n!}.$$

3048[+]. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}dx.$

**解** 利用 2864 题的结果，即得

$$\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}x\sin nx \quad (|\alpha|<1).$$

由于

$$\int_0^{\pi}x\sin nx dx=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{n},$$

所以，当 $|\alpha|<1$ 时，就有

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\alpha^{n-1}\frac{\pi}{n}$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}\ln(1+\alpha).$$

当 $|\alpha|>1$ 时，$\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$，

$$\frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{x\sin x}{1-2(\frac{1}{\alpha})\cos x+(\frac{1}{\alpha})^2}.$$

利用以上结果，即得：当 $|\alpha|>1$ 时，

阶台劳展式，有

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{x+a}\\
&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\\
&\quad+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{n}(\theta x)}{n!}x^{n}\\
&=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^{n}}\\
&\quad+(-1)^{n}\frac{1}{(a+\theta x)^{n+1}}x^{n}\\
&=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^{n}}\\
&\quad+(-1)^{n}\frac{x^{n}}{a^{n+1}}\cdot\frac{1}{(1+\theta\cdot\frac{x}{a})^{n+1}}\\
&=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{a^{n}}\\
&\quad+(-1)^{n}\overline{\theta}_n(x)\frac{x^{n}}{a^{n+1}},
\end{aligned}
$$

其中 $0<\theta<1$，而对于函数

$$
\overline{\theta}_n(x)=\frac{1}{(1+\theta\,\frac{x}{a})^{n+1}},
$$

也有 $0<\overline{\theta}_n(x)<1 \quad (0<x<+\infty)$.

由 $\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=n! \quad (n=0,1,2,\cdots)$

以及 $0<\int_0^{+\infty}e^{-x}\overline{\theta}_n(x)x^n dx<\int_0^{+\infty}e^{-x}x^n dx=n!$，

即知

$$
\int_0^{+\infty}e^{-x}\overline{\theta}_n(x)x^n dx=\theta_n n!,
$$

其中 $0<\theta_n<1$. 于是，

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{a+x}dx=\int_0^{+\infty}f(x)e^{-x}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{a^k}\int_0^{+\infty}x^{k-1}e^{-x}dx$$

$$+(-1)^n\frac{1}{a^{n+1}}\int_0^{+\infty}\theta_n(x)x^ne^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1!}{a^2}+\frac{2!}{a^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n}$$

$$+(-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}\theta_n.$$

公式证毕.

在上述公式中，令 $a=100=10^2$，则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{100+x}dx=10^{-2}-1!\,10^{-4}+2!\,10^{-6}-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}(n-1)!\,10^{-2n}+(-1)^n\theta_n n!\,10^{-2n-2}$$

$$(0<\theta_n<1).$$

如果取前两项来表示积分，即在上式中取 $n=2$，则误差为 $(-1)^2\theta_2 2!\,10^{-6}$，其绝对值小于 $2\cdot10^{-6}$，于是，

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^x}{100+x}dx-0.01+0.0001\right|\leqslant 0.000002$$

$$=2.10^{-6}.$$

## §9. 无穷乘积

1° 无穷乘积的收敛性 如果存在有穷而且异于零的极限

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}P_i=\lim_{n\to\infty}P_n=P,$$

则称无穷乘积

$$p_1p_2\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}P_n \tag{1}$$

是收敛的．

若 $P=0$ 而乘数 $p_n$ 中无一个等于零，则称乘积(1)发散于零；在相反的情形下，则称无穷乘积收敛于零．

乘积(1)的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln p_n \tag{2}$$

的收敛性是一样的．

收敛性的必要条件为：

$$\lim_{n\to\infty}p_n=1.$$

若 $p_n=1+\alpha_n(n=1,2,\cdots)$ 及 $\alpha_n$ 不变号，则乘积(1)收敛的必要而且充分的条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1) \tag{3}$$

收敛．

在一般的情形下，当 $\alpha_n$ 不保持固定的符号而级数(3)收敛，则乘积(1)将与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1)^2$$

同时收敛或同时发散，在发散的情形下，乘积发散于零．

2° 绝对收敛性　乘积(1)称为绝对或条件(非绝对)收敛是随级数(2)为绝对或条件收敛而定．级数(3)绝对收敛就是乘积(1)绝对收敛的充分而且必要的条件．

3° 函数的成无穷乘积展开　当 $-\infty<x<+\infty$ 时有展开式

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

特别是，由第一式当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时得瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

证明下列等式：

3051. $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}$.

**证** 记 $p_n=1-\frac{1}{n^2}$. 由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}p_i=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1}{2}.$$

3052. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

**证** 记 $p_n=\frac{n^3-1}{n^3+1}$. 由于部分乘积

$$P_n=\prod_{i=2}^{n}p_i=\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\to\frac{2}{3}(\text{当 } n\to\infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.$$

3053. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}$.

**证** 记 $p_n=1-\frac{2}{n(n+1)}$，由于部分乘积

$$P_n = \prod_{i=2}^{n} p_i = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \to \frac{1}{3}(\text{当 } n \to \infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}.$$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1 + (\frac{1}{2})^{2^n}\right] = 2.$

**证** 由于部分乘积满足下述等式：

$$(1 - \frac{1}{2})P_n = (1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2^2})\cdots$$

$$\cdot (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) = 1 - (\frac{1}{2})^{2^{n+1}},$$

从而

$$P_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \to \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2(\text{当 } n \to \infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1 + (\frac{1}{2})^{2^n}\right] = 2.$$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$

**证** 由于部分乘积

$$P_n = \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3}$$

$$\cdots\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{2}{\pi}\to\frac{2}{\pi}$$

(当 $n\to\infty$ 时)，

故

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}.$$

3056. $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

**证** 当 $x\neq 0$ 时，由于部分乘积

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\to\frac{\sin x}{x}$$

(当 $n\to\infty$ 时)，

故

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$$

3057. $\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh}x}{x}$.

**证** 由于部分乘积

$$P_n=\operatorname{ch}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2^2}\cdots\operatorname{ch}\frac{x}{2^n}=\frac{\operatorname{sh}x}{2^n\operatorname{sh}\frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2^n}} (x \neq 0)$$

及

$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{sh} y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\operatorname{ch} y} = 1,$$

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

**3058.** $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1 - x} (|x| < 1).$

**证** 由于

$$(1-x)P_n = (1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n}) = 1 - x^{2^{n+1}},$$

从而(注意$|x|<1$)

$$P_n = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \to \frac{1}{1-x} (\text{当 } n \to \infty \text{时}),$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1 - x}.$$

利用此题的结果，易得

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

此即 3054 题的结果.

**3059.** $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots.$

**证** 在 3056 题中，令 $x = \frac{\pi}{2}$，利用半角公式，有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

……

则得

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots,$$

也即

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots.$$

3060. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

**证** 利用函数 $\sin x$ 的无穷乘积展开

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

令 $x=\frac{\pi}{3}$,有

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(3n)^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2}.$$

于是得

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值:

3061. $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$.

**证** 由于部分乘积

$$P_n=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 6}{3\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 7}{4\cdot 6}\cdots\frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)}\cdot\frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n}\cdot\frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)}$$

$$=\frac{n+2}{4(n-1)}\to\frac{1}{4}\text{（当 }n\to\infty\text{时）},$$

故无穷乘积 $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$ 收敛，且其值为$\frac{1}{4}$.

3062. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$.

**证** $1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. 由于部分乘积

$$P_n=\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{(n-1)^2}{(n-2)n}\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$=\frac{2(n+1)}{n+2}\to 2\qquad\text{（当 }n\to\infty\text{时）},$$

故无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$收敛，且其值为 2.

3063. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

**证** 由于部分乘积

$$P_n=\frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}\cdot\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9}\cdot\frac{7\cdot 13}{9\cdot 11}\cdots\frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$$

当 $n\to\infty$ 时的极限存在且为 $P^2$，故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$ 收敛，且其值为 $P^2$，其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$.

(в) 可以. 事实上，部分乘积

$$Q_n = (p_1p_2\cdots p_n)(q_1q_2\cdots q_n)$$

当 $n\to\infty$ 时的极限存在且为 $PQ$，故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_nq_n$ 收敛，且其值为 $PQ$，其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$，$\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

(г) 可以. 事实上，部分乘积

$$Q_n = \frac{p_1p_2\cdots p_n}{q_1q_2\cdots q_n} \qquad (q_i \neq 0, i = 1,2,\cdots),$$

当 $n\to\infty$ 时的极限存在且为 $\frac{P}{Q}$，故 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ 收敛，且其值为 $\frac{P}{Q}$，其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$、$\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

研究下列无穷乘积的收敛性：

3066. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

**解**　由于通项 $p_n = \frac{1}{n} \to 0$（当 $n\to\infty$ 时），不满足收敛的必要条件（$p_n \to 1$）；或者说：由于部分乘积

$$p_n = \frac{1}{n!} \to 0（当 n\to\infty 时），$$

且每项不为零，故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散于零.

3067. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

**解** 通项 $p_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 收敛，且 $\frac{1}{n(n+2)}$ 不变号，故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ 收敛. 事实上，已由 3062 题知，该无穷乘积是收敛的，且其值为 2.

3068. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$.

**解** $p_n = 1 + \frac{1}{n^p}$，其中 $\frac{1}{n^p}$ 不变号. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛，而当 $p \leqslant 1$ 时发散，故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ 当 $p > 1$ 时收敛，而当 $p \leqslant 1$ 时发散.

3069. $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

**解** 由于 $p_n - 1 = -\frac{1}{n}$ 不变号，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ 发散，故原乘积发散. 或由于部分乘积

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

当 $n \to \infty$ 时的极限为零，且乘积中无一项为零，故原乘积发散于零.

3070*). $\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

**解** 通项 $p_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^p$. 由于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p=p\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$$

对任何 $p$ 均收敛(因为级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2+1}$ 收敛),故原无穷乘积对任何 $p$ 均收敛.

*)原题误为 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$,这时,若 $p\geqslant 0$,第一个因子为零,按定义无穷乘积收敛于零;若 $p<0$,第一个因子无意义,因此整个无穷乘积无意义.

3071. $\prod_{n=n_0}^{\infty}\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$,其中当 $n\geqslant n_0$ 时 $n^2+an+b>0$.

**解** 通项 $p_n=\frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$

$$=1+\frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b},$$

令

$$a_n=\frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}.$$

当 $a_1=a$ 时,$a_n\sim\frac{1}{n^2}$.由于 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故原乘积收敛.

当 $a_1\neq a$ 时,由于 $n^2+an+b>0$,且 $a_n\sim\frac{a_1-a}{n}$,故 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 发散,从而原乘积也发散.

3072. $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}$,其中 $n_0>b_i(i=1,2,\cdots,p)$.

**解** $p_n=\frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}=1+$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{p}b_i-\sum_{i=1}^{p}a_i\right)n^{p-1}+\cdots+(-1)^p\left(\prod_{i=1}^{p}a_i-\prod_{i=1}^{p}b_i\right)}{\prod_{i=1}^{p}(n-b_i)}.$$

令

$$a_n=\frac{\left(\sum_{i=1}^{p}b_i-\sum_{i=1}^{p}a_i\right)n^{p-1}+\cdots+(-1)^p\left(\prod_{i=1}^{p}a_i-\prod_{i=1}^{p}b_i\right)}{\prod_{i=1}^{p}(n-b_i)},$$

当 $\sum_{i=1}^{p}a_i=\sum_{i=1}^{p}b_i$ 时，$a_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$，故 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛，从而原乘积收敛．当 $\sum_{i=1}^{p}a_i\neq\sum_{i=1}^{p}b_i$ 时，由于当 $n>n_0$ 时，$\prod_{i=1}^{p}(n-b_i)>0$，且 $a_n\sim\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{p}b_i-\sum_{i=1}^{p}a_i\right)$，故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 发散，从而原乘积也发散．

3073. $\prod_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

**解** $p_n=\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$，$\ln p_n=\frac{1}{2}\ln\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$．由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$ 发散（于 $-\infty$），故原乘积也发散（于零）。

3074. $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

**解**

$$p_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},$$

$$\ln p_n = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$收敛. 因此，无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$收敛.

3075. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

**解** $p_n=\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$，$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$. 当$n\to\infty$时，有

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n^2},$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$收敛，从而原乘积也收敛.

3076. $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}$.

**解** $p_n=\sqrt[n^2]{n}$，$\ln p_n=\frac{1}{n^2}\ln n$. 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ln n.$$

由于$\frac{1}{n^2}\ln n=O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$，此处$\varepsilon$为满足$0<\varepsilon<1$的任一常数，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$收敛，故原乘积收敛.

3077. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$.

**解** 通项

$$p_n=\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=1-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故若记

$$p_n=1+\alpha_n,$$

则当 $n$ 充分大时，有

$$\alpha_n=-\frac{x^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})<0,$$

保持不变号. 注意到对任何 $x$，级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left[-\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

收敛，这里 $n_0$ 为适当大的某一正整数. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛.

因此，原无穷乘积收敛.

3078. $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$，其中 $c>0$.

**解** 对任意 $x$，考虑通项

$$p_n=\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}}$$

$$=\left(1-\frac{x}{c+n}\right)\left[1+\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=1-\frac{x}{c+n}+\frac{x}{n}-\frac{x^2}{n(c+n)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1-\frac{x^2-cx}{n(c+n)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=1+O(\frac{1}{n^2}).$$

易知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛，故原无穷乘积收敛.

3079. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$.

**解** 当 $|x|\geqslant 1$ 时，由于通项 $p_n=1-x^n\not\to 1$，即不满足收敛的必要条件，故原无穷乘积发散. 当 $|x|<1$ 时，若 $x=0$ 显然收敛；若 $x\neq 0$ 则有

$$\ln p_n=\ln(1-x^n)=-x^n\ln[(1-x^n)^{-\frac{1}{x^n}}].$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\ln[(1-x^n)^{-\frac{1}{x^n}}]=\lim_{y\to\infty}\ln\left[(1+\frac{1}{y})^y\right]=1,$$

从而

$$\ln p_n=O(|x|^n).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 当 $|x|<1$ 时收敛，故此时原无穷乘积收敛.

3080. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x^n}{2^n})$.

**解** 当 $|x|\geqslant 2$ 时，通项 $p_n=1+(\frac{x}{2})^n\not\to 1$，故原无穷乘积发散. 当 $|x|<2$ 时，若 $x=0$ 显然收敛；若 $x\neq 0$，利用

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}}=\lim_{y_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}=e,$$

就有

$$\ln p_n=\ln\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$$

$$=\frac{x^n}{2^n}\ln\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}}=O\left(\left|\frac{x}{2}\right|^n\right).$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{2}\right|^n$当$|x|<2$时收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$收敛. 因此，原无穷乘积收敛.

3081. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

解 1)当$|x|<e$时，利用

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e+o(1) \quad (\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

存在适当大的整数$n_0$，当$n\geqslant n_0$时，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>|x|,$$

于是相应地，得

$$\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right|=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{|x|}\right]^n>1.$$

这表明，此时

$$p_n=1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\not\to 1(\text{当 } n\to\infty\text{时}),$$

即不满足无穷乘积收敛的必要条件，故原无穷乘积发散.

2)当$|x|=e$时，利用70题的结果，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>e-\frac{3}{n}.$$

此时，得

$$p_n=1+(\operatorname{sgn}x)^n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$$

$$=1+(\operatorname{sgn}x)^n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n$$

$$=1+\alpha_n.$$

但

$$|\alpha_n|=\left|(\operatorname{sgn}x)^n\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n\right|$$

$$=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right]^n>\left(\frac{e-\frac{3}{n}}{e}\right)^n$$

$$=\left(1-\frac{3}{e}\cdot\frac{1}{n}\right)^n,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{e}\cdot\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{ne}\right)^{\frac{ne}{3}}\right)^{\frac{3}{e}}$$

$$=e^{-\frac{3}{e}}>0,$$

故此时有 $\alpha_n\not\to 0$，也即 $p_n\not\to 1$（当 $n\to\infty$ 时），从而原无穷乘积发散.

3）当 $|x|>e$ 时，记 $p_n=1+\alpha_n$，为考察 $\alpha_n$ 的变化，仍利用

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e+o(1)\ (n\to\infty),$$

存在适当大正整数 $n_0$，当 $n\geqslant n_0$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{1}{2}(e+|x|).$$

记

$$q=\frac{1}{2}\cdot\frac{|x|+e}{|x|},$$

则 $0<q<1$，有

$$|\alpha_n|=\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right|=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{|x|}\right]^n$$

绝对收敛，从而知原无穷乘积收敛.

3083$^+$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{x^n}{n^p}\right)\cos\dfrac{x^n}{n^q}$.

**解** 1）当 $|x|<1$ 时，通项

$$p_n=\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\cos\frac{x^n}{n^p}$$

$$=\left(1+\frac{x^n}{n^p}\right)\left[1+O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)\right]$$

$$=1+\frac{x^n}{n^p}+O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)+O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right)$$

$$=1+O\left(\frac{x^n}{n^p}\right)+O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right).$$

当 $n$ 充分大时，不论 $p$，$q$ 为何值，均有

$$\frac{x^n}{n^p}=O(|x|^{\frac{n}{2}}),\frac{x^{3n}}{x^{p+2q}}=O(|x|^{\frac{n}{2}}).$$

于是可写

$$p_n=1+\alpha_n,\alpha_n=O(|x|^{\frac{n}{2}}).$$

因此有

$$|\ln p_n|=|\ln(1+\alpha_n)|=O(|\alpha_n|)=O(|x|^{\frac{n}{2}}).$$

由于当 $|x|<1$ 时，

$$\sum_{n=)}^{\infty}(\sqrt{|x|})^n<+\infty,$$

从而 $\sum\ln p_n$ 绝对收敛，故原乘积 $\prod p_n$ 收敛.

2）当 $x=1$ 时，在 $p>1$，$q>\dfrac{1}{2}$ 的情况下，由于通项

$$p_n=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{1}{n^q}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\left[1-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right]$$

$$=1+\frac{1}{n^p}-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right)$$

$$=1+\frac{1}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

若记

$$p_n=1+\alpha_n,\alpha_n=\frac{1}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

则$\sum\alpha_n$绝对收敛，且由

$$\alpha_n^2=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right)$$

$$=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right),$$

易知$\sum\alpha_n^2$也收敛，故此时乘积$\prod p_n$收敛.

3)当$x=-1$时，在$p>\frac{1}{2},q>\frac{1}{2}$的情况下，由于通项

$$p_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\cos\frac{(-1)^n}{n^q}=\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$$

$$\cdot\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right]$$

$$=1+\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{2n^{2q}}+O\left(\frac{1}{n^{p+2q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right)$$

$$=1+\frac{(-1)^n}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

可记

$$p_n=1+\beta_n,\beta_n=\frac{(-1)^n}{n^p}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right).$$

则有

$$\ln p_n=\ln(1+\beta_n)=\beta_n+O(\beta_n^2),$$

易见$\sum\beta_n$收敛，而

$$\beta_n^2=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right)$$

$$=\frac{1}{n^{2p}}+O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

故$\sum\beta_n^2$绝对收敛，从而知$\sum\ln p_n$收敛．于是，此时乘积$\prod p_n$收敛．

3084. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

**解** 显然应当要求$x\neq0$．记通项为$p_n=(1+\alpha_n)^p$，其中

$$\alpha_n=\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}-1=\left(1-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1$$

$$=-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad(n\to\infty),$$

而

$$\ln p_n=p\ln(1+\alpha_n)=p\ln\left[1-\frac{x^2}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$收敛*)，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$收敛，从而原无穷乘积收敛．

*)参看2677题的结果．

3085. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

**解** 记

$$p_n=\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n},$$

由要求$\ln(n+x)-\ln n\geqslant0$，知$x\geqslant0$． 1)当$x=0$时，显然各项均为零，无穷乘积收敛于零．2)当$x>0$时，由

$$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

可知，当 $n\geqslant\frac{x}{e-1}$ 时，有 $\ln(1+\frac{x}{n})\leqslant 1$，故此时

$$\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\leqslant 0.$$ 再由

$$\frac{-\frac{1}{n}\ln\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\ln\frac{1}{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}\to+\infty$$

及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}\ln\ln(1+\frac{x}{n})$ 发散，从而得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 发散. 因此，原无穷乘积发散.

3086. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛.

**证** 当 $x\to 0$ 时，$p_n=\cos x_n=1+\alpha_n$，其中 $\alpha_n=-\frac{1}{2}x_n^2+o(x_n^2)$，$\alpha_n\leqslant 0$，且由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{x_n^2}{2}+o(x_n^2)\right]$$

收敛，故乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛.

3087. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$ 收敛.

**证** 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 此时有

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)=\frac{1+\mathrm{tg}\alpha_n}{1-\mathrm{tg}\alpha_n}$$
$$=(1+\mathrm{tg}\alpha_n)(1+\mathrm{tg}\alpha_n+\mathrm{tg}^2\alpha_n+\cdots)$$

$$=1+2\operatorname{tg}\alpha_n+2\operatorname{tg}^2\alpha_n+\cdots$$
$$=1+2\alpha_n+o(\alpha_n).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(x_n)]$ 收敛，而且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(x_n)]^2=\sum_{n=1}^{\infty}4\alpha_n^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot o(\alpha_n)+\sum_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$$

也收敛*)，故无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$$

收敛.

*) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\leqslant\sum_{s=1}^{\infty}|\alpha_{i_s}|\cdot|\alpha_{i_s}|,$$

因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 也收敛. 又当 $n$ 充分大时，有

$$|\alpha_n\cdot o(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,\ |o^2(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot o(\alpha_n)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$ 均收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性：

**3088.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

**解** 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 条件收敛，且级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]^2$ 收敛，故原无穷乘积条件收敛.

**3089.** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

**解** 由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$条件收敛，且级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故原无穷乘积发散.

3090. $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

**解** 当$p>1$时，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$绝对收敛，故原无穷乘积绝对收敛.

当$\frac{1}{2}<p\leqslant 1$时，由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$条件收敛及$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$收敛，故原无穷乘积条件收敛.

当$0<p\leqslant\frac{1}{2}$时，由于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$发散，故原无穷乘积发散.

当$p\leqslant 0$时，由于$\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$不趋于零，故原无穷乘积也发散.

3091. $\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

**解** 由于级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$条件收敛及$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散*)，故原无穷乘积发散.

*）当$n$充分大时，显然有$n>\ln^2 n$，故$\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$. 由$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$发散即知$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散.

3092. $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

**解** 记

$$p_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n},$$

则有

$$\ln p_n=\ln\left[1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right].$$

令

$$u_k=\ln p_{2k}+\ln p_{2k+1}\quad (k=1,2,3\cdots),$$

即得

$$u_k=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{2k}+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2k+1}-1}\right)$$

$$=\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]>0.$$

由于

$$\lim_{k\to\infty}\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]^{-\frac{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}}=1,$$

故有

$$u_k=-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\cdot\ln\left[1-\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]^{-\frac{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}}$$

$$\sim-\left[\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k}-1}{(\sqrt{2k}+1)(\sqrt{2k+1}-1)}\right]\sim\frac{1}{2k}$$

$$(k\to\infty).$$

由此可知$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$发散，从而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln p_n$发散. 因此，原无穷乘积发散.

3093. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

**解** 记 $p_n=n^{(-1)^n}$，则有子序列

$$p_{2k}=(2k)^{(-1)^{2k}}=2k\to\infty\ (k\to\infty).$$

于是 $p_n\not\to 1\ (n\to\infty)$. 从而原无穷乘积发散.

3094. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

**解** 记 $p_n=\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$，则有

$$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln n^{(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n}\ln n.$$

注意到级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$是莱布尼兹型级数，它条件收敛，因而原无穷乘积条件收敛.

3095. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]$.

**解** 记

$$p_n=1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n},$$

则有

$$|\ln p_n|=\frac{1}{n}\left|\ln\left(1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right)^{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot n}\right|\sim\frac{1}{n}$$

$$(当\ n\to\infty).$$

因此，可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln p_n|$发散. 若令 $u_n=\ln p_n$，则有

$$u_{2k-1}=\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right),$$

$$u_{2k}=\ln\left(1+\frac{(-1)^k}{2k}\right)(k=1,2,3\cdots).$$

记 $a_k=u_{2k-1}+u_{2k}$，可得

$$a_k=\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}+\frac{(-1)^k}{2k}+\frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)}\right)$$

$$=\ln\left(1+\frac{(-1)^{k-1}-1}{2k(2k-1)}\right)\quad(k=1,2,3,\cdots),$$

故

$$a_{2m-1}=0,$$

$$a_{2m}=\ln\left(1-\frac{2}{4m(4m-1)}\right)(m=1,2,3,\cdots).$$

于是，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛. 注意到 $u_k\to 0(k\to\infty)$，可得 $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ 收敛. 因此，原无穷乘积条件收敛.

3096. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$.

**解** 研究无穷级数

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)$$

$$+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots$$

的收敛性问题. 今将级数(1)每三项依次加括号，考虑如此形成的新级数：

$$=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}}+\sqrt{1+\frac{1}{4n}}\right)-1}{\sqrt{16n^2-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}}\right]$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\right.$$

$$\frac{2(\sqrt{n}+1)\left[1-\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)+1+\frac{1}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1}{\sqrt{16n^2-1}}$$

$$\left.+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$=\ln\left[1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2(\sqrt{n}+1)\left(2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1}{\sqrt{16n^2-1}}\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{16n^2-1}}-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{16n^2-1}(\sqrt{16n^2-1}+4n)}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$=\ln\left(1-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$$

$$=\ln[1+\alpha_n],$$

其中 $\alpha_n=-\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$，故 $\alpha_n\to 0$ 且当 $n$ 充分大时 $\alpha_n<0$.

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}$发散，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$发散；因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_n)$发散．于是，原无穷乘积发散．

3097．$\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\cdots$．

**解** 记

$$q_1=1+\frac{1}{1^\alpha},q_2=\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2,q_3=1+\frac{1}{3^\alpha},$$

$$q_4=1+\frac{1}{4^\alpha},q_5=\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2,q_6=1+\frac{1}{6^\alpha},\cdots.$$

若记$q_n=1+\alpha_n$，则

$$\alpha_1=\frac{1}{1^\alpha},\alpha_2=-\frac{2}{2^\alpha}+\frac{1}{2^{2\alpha}},\alpha_3=\frac{1}{3^\alpha},\alpha_4=\frac{1}{4^\alpha},$$

$$\alpha_5=-\frac{2}{5^\alpha}+\frac{1}{5^{2\alpha}},\alpha_6=\frac{6}{6^\alpha},\cdots.$$

1）当$\alpha>1$时，显然

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|=\frac{1}{1^\alpha}+\left(\frac{2}{2^\alpha}-\frac{1}{2^{2\alpha}}\right)+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\left(\frac{2}{5^\alpha}-\frac{1}{5^{2\alpha}}\right)+\frac{1}{6^\alpha}+\cdots. \quad (1)$$

是收敛的，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$绝对收敛．

2）注意当$\alpha\leqslant0$时，不可能有

$$\lim_{n\to\infty}q_n=1,$$

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$发散．

3)今讨论 $0<\alpha\leqslant1$ 时的情形. 将原无穷乘积写为

$$\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{7^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{8^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{8^\alpha}\right)$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{9^\alpha}\right)\cdots,$$

记

$$p_1=1+\frac{1}{1^\alpha},p_2=1-\frac{1}{2^\alpha},p_3=1-\frac{1}{2^\alpha},$$

$$p_4=1+\frac{1}{3^\alpha},p_5=1+\frac{1}{4^\alpha},p_6=1-\frac{1}{5^\alpha},p_7=1-\frac{1}{5^\alpha},$$

$$p_8=1+\frac{1}{6^\alpha},p_9=1+\frac{1}{7^\alpha},\cdots,$$

又记

$$p_n=1+\alpha_n^*\ (n=1,2,3,\cdots).$$

为研究乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 的收敛性,考虑通项的表达式,有

$$\alpha_n^*=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+3k)^\alpha},当\ n=4k+1,\\ -\dfrac{1}{(2+3k)^\alpha},当\ n=4k+2\ 或\ n=4k+3,\\ \dfrac{1}{(3+3k)^\alpha},当\ n=4k+4(k=0,1,2,\cdots).\end{cases}$$

为考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^*$ 的收敛性,可看级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha}-2\cdot\frac{1}{(2+3k)^\alpha}+\frac{1}{(3+3k)^\alpha}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k$$

的收敛性，为此，估算通项 $a_k$，有

$$a_k=\frac{1}{(1+3k)^a}-\frac{2}{(2+3k)^a}+\frac{1}{(3+3k)^a}$$

$$=\left[\frac{1}{(1+3k)^a}-\frac{1}{(2+3k)^a}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{(2+3k)^a}-\frac{1}{(3+3k)^a}\right]$$

$$=\frac{a}{(3k+1+\theta_1)^{a+1}}-\frac{a}{(3k+2+\theta_2)^{a+1}}$$

$$=\frac{a(a+1)}{[3k+1+\theta(1+\theta_2-\theta_1)]^{a+2}}\cdot(1+\theta_2-\theta_1),$$

其中 $0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1, 0<\theta<1$. 显然，令 $\delta=1+\theta_2-\theta_1$，则有 $0<\delta<2$，且 $\theta(1+\theta_2-\theta_1)=\theta\delta\in(0,2)$. 因而

$$0<a_k=\frac{a(a+1)}{(3k+1+\theta\delta)^{a+2}}\cdot\delta\leqslant\frac{2a(a+1)}{(3k+1)^{a+2}}.$$

由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^{a+2}}$ 的收敛性知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^*$ 收敛. 但 $a_n^*$ 变号，还需看级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{*2}$. 易见

$$a_n^{*2}=\begin{cases}\frac{1}{(1+3k)^{2a}}, \text{当 } n=4k+1,\\ \frac{1}{(2+3k)^{2a}}, \text{当 } n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3,\\ \frac{1}{(3+3k)^{2a}}, \text{当 } n=4k+4(k=0,1,2,\cdots).\end{cases}$$

无论哪种情形，均有

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{4}\right)^{2a}}<a_n^{*2}<\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}\right)^{2a}}(n=1,2,3\cdots).$$

因而当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由上述左侧不等式，从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{4}\right)^{2\alpha}}$$

的发散性，便知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{*2}$发散，从而$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$此时发散.

因此$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$也发散. 当$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$时，由上述不等式右侧部分，从

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}\right)^{2\alpha}}<+\infty$$

便知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^{*2}$此时收敛. 从而相应地$\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$也收敛. 因此，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$也收敛. 但由(1)式知(当$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$时)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$发散，故当$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$时$\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$条件收敛.

**3098.** 证明：纵使级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots \tag{1}$$

发散，而乘积

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots \tag{2}$$

收敛.

**证** 设原级数(1)的通项为$u_n$，则

$$u_{2k-1}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1},$$

$$u_{2k}=-\frac{1}{\sqrt{k+1}}(k=1,2,3\cdots).$$

令

$$a_k=u_{2k-1}+u_{2k}=\frac{1}{k+1}.$$

显然，$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散，故原级数(1) 即 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必然发散.

考虑原无穷乘积(2) 所对应的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n),$$

则其通项 $v_n\to 0(n\to\infty)$，且

$$v_{2k-1}=\ln(1+u_{2k-1})=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right),$$

$$v_{2k}=\ln(1+u_{2k})=\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\quad(k=1,2,\cdots),$$

从而

$$\begin{aligned}b_k&=v_{2k-1}+v_{2k}\\&=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\\&=\ln\left(1-\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\right).\end{aligned}$$

因此，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ 收敛，从而可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，故原无穷乘积(2) 必收敛.

3099. 证明：纵使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 二者发散，而乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 收敛，其中

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & \text{若 } n=2k-1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{若 } n=2k.\end{cases}$$

**证** 考虑 $\alpha_k=a_{2k-1}+a_{2k}$，则有

$$\alpha_k=\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}\ (k=1,2,3,\cdots).$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k\sqrt{k}}$ 收敛，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ 发散，便知正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 发散，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

再记 $b_k=a_{2k-1}^2+a_{2k}^2$，则有

$$\begin{aligned}b_k&=\left(\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3}\right)\\&=\frac{2}{k}+\frac{2}{k\sqrt{k}}+\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^2\sqrt{k}}+\frac{1}{k^3}\\&=\frac{2}{k}+O\left(\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right).\end{aligned}$$

由级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k^3}}$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{k}$ 发散，便知正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 发散，从而原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散.

再考虑原无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 所对应的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，其中通项

$$v_n=\ln(1+a_n)\ (n=1,2,3,\cdots).$$

考虑

$$c_k = v_{2k-1} + v_{2k} = \ln(1 + a_{2k-1}) + \ln(1 + a_{2k})$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$

$$= \ln\left[1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

于是,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 注意到 $v_n \to 0 (n \to \infty)$,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 因此,原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \alpha_n)$ 收敛.

3100. 设

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(黎曼 $\zeta$ 函数) 而 $p_n(n = 1, 2, \cdots)$ 是素数的叙列.

证明 $$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x).$$

证 设 $x > 1$. 首先,有

$$\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{(p_n^2)^x} + \cdots + \frac{1}{(p_n^m)^x} + \cdots.$$

如果把对应于不超过自然数 $N$ 的所有素数的有限个这种级数相乘起来,则部分乘积就等于

$$\prod_{p_n \leqslant N}\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{n_1^x} + \frac{1}{n_2^x} + \cdots,$$

其中 $n_1, n_2, \cdots$ 是整数,它不包含超过 $N$ 的素因子,显然 $1, 2, \cdots, N$ 这种整数全被包含在 $n_1, n_2, \cdots$ 之中. 因此

$$\left|\zeta(x) - \prod_{p_n \leqslant N}\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}\right|$$

$$=\left|\zeta(x)-1-\frac{1}{n_1^x}-\frac{1}{n_2^x}-\cdots\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(N+1)^x}+\frac{1}{(N+2)^x}+\cdots\to 0(n\to\infty),$$

取极限即得

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x)(x>1).$$

3101. 证明:乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$$

〔其中 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 是素数的叙列〕发散(尤拉).

**证** 与3100题的处理方法类似,考虑部分乘积,易见也有

$$\prod_{p_n\leqslant N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}>\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

由于当 $N\to+\infty$ 时,$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ 发散,故 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{p_n})^{-1}$ 发散,且具有值 $+\infty$.

由上述可知,$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ 发散于零.又由于 $\frac{1}{p_n}>0$,它始终不变号,故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$$

发散.

3102. 设 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,且

则 $k_0 \neq 0$，且 $k_0$ 为一有限正数，再研究部分乘积

$$P_N = a_1 \prod_{n=1}^{N} p_n.$$

一方面，$P_N \to a_1 k_0 > 0$（当 $N \to \infty$ 时）；另一方面，由于

$$P_N = a_1 \prod_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$
$$= a_{N+1} \prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p,$$

注意 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \beta_n$，其中 $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$，故当 $N$ 充分大时，有

$$\ln \prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = p\sum_{n\leqslant N}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$= p\sum_{n\leqslant N}\left(\frac{1}{n} + \beta_n\right)$$
$$= p\left[\ln N + C + O\left(\frac{1}{N}\right) + \sum_{n=1}^{N}\beta_n\right]$$
$$= p\left[\ln N + C + B + O\left(\frac{1}{N}\right)\right]$$
$$= p\left[\ln N + C_0 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right],$$

其中 $C$ 为 Euler 常数，$C>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = B$ 是一常数，而 $\sum_{n=1}^{N}\beta_n = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n + O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right) = B + O\left(\frac{1}{N}\right)$，$C_0 = C + B$ 是一常数．于是

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = e^{p(\ln N + C_0 + O(\frac{1}{N}))}$$
$$= N^p \cdot G_N,$$

其中

$$G_N=e^{c_0p+O(\frac{1}{N})}\longrightarrow e^{c_0p}>0(N\to+\infty).$$

这样一来，就有

$$\begin{aligned}0<a_1k_0&=\lim_{N\to\infty}P_N=\lim_{N\to\infty}\left[a_{N+1}\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\right]\\&=\lim_{N\to\infty}[a_{N+1}N^pG_N]\\&=\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p)\cdot\lim_{N\to\infty}G_N\\&=e^{c_0p}\cdot\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p).\end{aligned}$$

上述式子中的各个极限运算是允许的，因为 $P_N$ 及 $G_N$ 的极限存在，且 $G_N$ 的极限不为零，故 $a_{N+1}N^p=\frac{P_N}{G_N}$的极限存在．因此，就有

$$\lim_{N\to\infty}(a_{N+1}N^p)=\frac{a_1k_0}{e^{c_0p}}(\text{非零常数}).$$

这表明 $a_{N+1}$ 与 $\frac{1}{N^p}$ 为同级无穷小量，或者说，$a_N$ 与 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 为同级无穷小量，但 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 与 $\frac{1}{N^p}$ 同级，故最后得：$a_N$ 与 $\frac{1}{N^p}$ 是同级无穷小量，也即当 $N$ 充分大时，有

$$a_N=O^*\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

**3103.** 利用瓦里斯公式证明

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

**证** 瓦里斯公式为

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2},$$

或 $$\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\sim\frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

上式两端开方，即得

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

**3104.** 证明：表示式

$$a_n=\frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

当 $n\to\infty$ 时有异于零的极限 $A$.

由此推出斯特林格公式

$$n!\ =An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\varepsilon_n),$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ 和 $A=\sqrt{2\pi}$.

**证** 按题设我们可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}.$$

下证不等式：

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}},\tag{1}$$

证明了这一点，即可知 $a_{n+1}<a_n$，从而 $\{a_n\}$ 为递减数列．事实上，在等式

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots)$$

中令 $x=\frac{1}{2n+1}$，即得

$$\ln\frac{n+1}{n}=\frac{2}{2n+1}\left[1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots\right],$$

也即

$$(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots.$$

上式右端显然大于 1，但小于

$$1+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots\right]=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

因此，我们有

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

由此，取指数（底为 $e$），即得（1）式：

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

由上述不等式，即可推知：

$$0<a_{n+1}<a_n \qquad (n=1,2,\cdots)$$

及 $\quad a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}e^{-\frac{1}{12n(n+1)}}.$

由此可见，数列 $\{a_n\}$ 为单调递减且有下界的数列，因此它有有限极限 $A$；而数列 $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ 单调递增且有上界：$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a_n<a_1$，故也有极限．由于 $e^{-\frac{1}{12n}}\to 1(n\to\infty)$，故这两个数列有同一极限 $A$. 由于对任何的 $n$，不等式

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<A<a_0$$

成立，故在 0 与 1 之间存在这样的 $\theta$，使得

$$A=a_n e^{-\frac{\theta}{12n}} \text{或} a_n=Ae^{\frac{\theta}{12n}}.$$

因此，

$$\frac{n!\ e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=Ae^{\frac{\theta}{12n}},$$

即 $\quad n!\ =An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (\theta=\theta(n),0<\theta<1),$

或

$$n!\ =An^{n+\frac{\theta}{2}}e^{-n}(1+\epsilon_n),$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\epsilon_n=0$.

现在我们来确定常数 $A$. 将瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$$

稍加变形，并将 $n!$ 的表达式代入，即得

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{2^{2n}A^2n^{2n+1}e^{-2n}e^{\frac{\theta}{6n}}}{A\cdot 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}e^{\frac{\theta}{24n}}}\right\}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}A^2\cdot\frac{n}{2}e^{\frac{\theta}{4n}}=\frac{A^2}{4}.$$

由此得 $A^2=2\pi$ 或 $A=\sqrt{2\pi}\,(A>0)$.

于是，最后证得斯特林格公式为

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}\qquad(0<\theta<1).$$

用上式可估计很大的 $n$ 时阶乘 $n!$ 的值.

**3105.** 根据尤拉的定义Г玛函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定：

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由这个公式出发：(a)表函数 $\Gamma(x)$ 为无穷乘积的形状；(б)证明 $\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 $x$ 皆有意义；(в)推出下面这个性质

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x);$$

(г)对于正整数 $n$ 求 $\Gamma(n)$ 之值.

**解** (a)由于

$$\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{n^x}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^x},$$

故得

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(б)由上面$\Gamma(x)$写成无穷乘积的过程，得知$x\neq-n(n=0,1,2\cdots)$，即当$x$为非负整数时$\Gamma(x)$才允许写成上述形式．另一方面，由于

$$p_n=\frac{(1+\frac{1}{n})^x}{1+\frac{x}{n}}=1+\alpha_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

而$\alpha_n=\frac{x(x-1)}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3})$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$绝对收敛，从而无穷乘积

$$\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

绝对收敛，也即$\Gamma(x)$对于$x\neq-n(n=0,1,2,\cdots)$的一切实数$x$皆有意义．

(в)由于

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\ n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\ n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!\ n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\frac{n!\ n^{x}}{x(x+1)\cdots(x+n)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

故 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(г)令 $x=n-1$,即得

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$=\cdots=(n-1)!\ .$$

3106. 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上可以积分及

$$\delta_n=\frac{b-a}{n},f_{in}=f(a+i\delta_n)(i=1,2,\cdots,n),$$

证明 $$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})=e^{\int_a^b f(x)dx}.$$

证 令 $y_n=\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})$,则

$$\ln y_n=\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\delta_n f_{in})$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[f_{in}\delta_n+O(\delta_n^2)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f_{in}\delta_n+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是,

$$\lim_{n\to\infty}\ln y_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}f_{in}\delta_n+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= \int_a^b f(x)dx,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x)dx}.$$

证毕．

3107*). 证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)} = \frac{2}{e},$$

其中 $a>0$ 和 $b>0$.

**证**　记 $t=\frac{b}{a}$，则 $t>0$，有

$$S_n = \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n-1}(a+ib)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)} = \frac{\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(1+it)}}{\frac{a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1+it)}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(1+it)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(1+it)}.$$

注意，当 $n$ 充分大时，可算得

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+it) = n + t\sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= n + \frac{t}{2}(n-1)n = \frac{t}{2}n^2 + O(n).$$

记 $Q_n=\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(1+it)}$，考虑

$$\begin{aligned}\ln Q_n&=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+it)\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left[\frac{1+it}{1+nt}(1+nt)\right]\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+nt)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln\frac{1+it}{1+nt}\\&=\ln(1+nt)+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1-\Delta_i),\end{aligned}$$

其中

$\Delta_i=1-\frac{1+it}{1+nt}=\frac{(n-i)t}{1+nt}(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，

故得

$$\begin{aligned}\ln Q_n&=\ln(nt)+\ln\left(1+\frac{1}{nt}\right)+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\left(1-\frac{t}{1+nt}j\right)\\&=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{tj}{1+nt}\right)^k\\&=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{1+nt}\right)^k\sum_{j=1}^{n}j^k\\&=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{t}{1+nt}\right)^k\\&\quad\cdot\left[\frac{1}{k+1}n^{k+1}+O(n^k)\right]\\&=\ln(nt)+O\left(\frac{1}{n}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k\end{aligned}$$

$$S_n=\frac{Q_n}{\frac{t}{2}n+O(1)}=\frac{\frac{nt}{e}\cdot e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{\frac{t}{2}n+O(1)}$$

$$=\frac{2}{e}\cdot\frac{e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

最后得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{e}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{e^{O(\frac{1}{n}\ln n)}}{1+O\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{e}.$$

证毕.

*) 原题有误. 应改为由叙列$\{a+ib\}$的几何平均与算术平均之比的极限,分母应为

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib),$$

而不是$\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)$.

3108. 设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在区间$(a,b)$内为连续函数且$|f_n(x)|\leqslant c_n(n=1,2,\cdots)$,其中级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛.

证明:函数

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$$

在区间$(a,b)$上是连续的.

证 1) 首先证明上述乘积对任何$x\in(a,b)$是收敛的. 注意级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$收敛,故$c_n\to0$(当$n\to\infty$时),因而$f_n(x)\to0$(当$n\to\infty$时),故存在正整数$N_0$,当$n\geqslant N_0$

时，有 $|f_n(x)| < \delta$，此处 $\delta$ 可事先取 $(0,1)$ 内的任一实数．现在只要研究乘积 $\prod_{n=N_0+1}^{\infty}[1+f_n(x)]$ 的收敛性即可，或改写

$$\prod_{n=N_0+1}^{\infty}[1+f_n(x)]=\prod_{k=1}^{\infty}[1+g_k(x)], \qquad (1)$$

其中

$$g_k(x)=f_{N_0+k}(x) \quad (k=1,2,\cdots).$$

如能证明

$$G(x)=\prod_{k=1}^{\infty}[1+g_k(x)] \qquad (2)$$

是收敛的，以及下面再证 $G(x)$ 是连续的，那么

$$F(x)=G(x)\prod_{n=1}^{N_0}[1+f_n(x)] \qquad (3)$$

当然是收敛的而且是连续的．今研究(2)式，其中 $|g_n(x)| < \delta$，因而 $1+g_n(x) > 0(n=1,2,\cdots)$．现在考察乘积对应的另一级数 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$：显然，由 $|g_n(x)| \leqslant C_{N_0+n}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}C_{N_0+n}$ 收敛，便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 绝对收敛．

因而原乘积(2)(绝对)收敛．

2) 再证 $G(x)$ 的连续性．注意当 $x\in(a,b)$ 时 $G(x)>0$，故可考虑它的对数函数 $L(x)=\ln G(x)$．若能证得 $L(x)$ 为 $(a,b)$ 上的连续函数，则就可得知 $G(x)$ 也在 $(a,b)$ 上连续．由于

$$L(x)=\ln G(x)=\ln\prod_{n=1}^{\infty}[1+g_n(x)]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+g_n(x)]$$
以及 $|g_n(x)|\leqslant C_{N_0+n}, C_{N_0+n}\to 0(n\to\infty)$，再注意到 $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$，即知：当 $n$ 充分大时($n>N^*$)，对一切$x\in(a,b)$ 皆有
$$|\ln[1+g_n(x)]|\leqslant 2|g_n(x)|\leqslant 2C_{n+N_0}.$$
根据 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{n+N_0}$ 的收敛性知，$L(x)$ 为一在区间$(a,b)$ 上一致收敛的连续函数项级数之和．因而 $L(x)$ 在$(a,b)$ 上为一连续函数．从而$G(x)$ 在$(a,b)$ 上连续．因此，最后得知 $F(x)$ 在$(a,b)$ 内是一连续函数．证毕．

3109. 求函数
$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$$
的导函数之表达式．$F'(x)$ 存在的充分条件为何？

**解**　首先假定 $1+f_n(x)\neq 0\quad(a<x<b, n=1,2,\cdots)$.

如果在区间$(a,b)$ 内的任意一点 $x$ 上，均有$\{f_n(x)\}$ 绝对收敛，也即
$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty(x\in(a,b)),\qquad(1)$$
那么，显然无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$在$(a,b)$ 内(绝对)收敛且 $F(x)\neq 0$. 考虑函数

$$G(x) = \ln|F(x)|. \tag{2}$$

为研究取 $F(x)$ 的导函数的计算式，先对(2) 作形式求导，有

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} \text{ 或 } F'(x) = F(x)G'(x). \tag{3}$$

今再研究 $G'(x)$，即研究形式导数

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\ln\left|\prod_{n=1}^{\infty}[1 + f_n(x)]\right|\right)' \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln|1 + f_n(x)|\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\ln|1 + f_n(x)|)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}. \end{aligned} \tag{4}$$

为使(4) 式的一切运算有意义，我们可给出如下充分条件：$f_n(x)$ 可导，且

$$|f_n'(x)| \leqslant c_n, \sum_{n=1}^{\infty}c_n < +\infty \quad (x \in (a,b)). \tag{5}$$

下面我们证明：在条件(1)、(5) 之下，$F(x)$ 在$(a,b)$ 内可导，且

$$F'(x) = F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}. \tag{6}$$

只要证明(6) 式对$(a,b)$ 中任一点 $x_0$ 成立. 设 $x_0 \in (a,b)$ 已取定. 取 $a_1, b_1$ 使 $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$. 首先证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)| \tag{7}$$

在$(a_1,b_1)$上一致收敛，注意到$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x_0)|$的收敛性，为此又只要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)-f_n(x_0)| \tag{8}$$

在$(a_1,b_1)$上一致收敛．但根据(5)式，有：当$x\in(a_1,b_1)$时，

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f_n(x_0)|&=|f_n'(\xi_n)(x-x_0)|\\&\leqslant(b_1-a_1)c_n\qquad(n=1,2,3,\cdots),\end{aligned} \tag{9}$$

其中$x_0\leqq\xi_n\leqq x$．由$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$的收敛性，根据外氏判别法知级数(8)，从而级数(7)，在$(a_1,b_1)$上一致收敛．于是，必有正整数$N$存在，使当$n>N$时，对一切$x\in(a_1,b_1)$，恒同时满足下面两个不等式：

$$|f_n(x)|<\frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$|\ln[1+f_n(x)]|\leqslant2|f_n(x)|, \tag{11}$$

由(10)式与(5)式又知：当$n>N$时，对一切$x\in(a_1,b_1)$，有

$$\left|\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}\right|\leqslant2c_n. \tag{12}$$

根据(11)式与(12)式，注意到级数(7)在$(a_1,b_1)$的一致收敛性知，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln|1+f_n(x)|$与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}$都在$(a_1,b_1)$上一致收敛．从而知(4)式中的逐项求导数是允许的，即$G(x)$在$(a_1,b_1)$上可导，且(4)式成立．由(2)式知

$$|F(x)| = e^{G(x)}. \tag{13}$$

由(9)式得：当 $a_1 < x < b_1$ 时，

$$|f_n(x)| \leqslant (b_1 - a_1)c_n + |f_n(x_0)|$$
$$= d_n \quad (n = 1,2,3,\cdots),$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛，故根据 3108 题的结果知 $F(x)$ 在 $(a_1,b_1)$ 上连续．但前面已述 $F(x) \neq 0$，故在 $(a_1,b_1)$ 上或是 $F(x)$ 恒大于零，这时(13)式为

$$F(x) = e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1); \tag{14}$$

或是 $F(x)$ 恒小于零，这时(13)式为

$$F(x) = -e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1). \tag{15}$$

在(14)式成立的情形，由 $G(x)$ 在 $(a_1,b_1)$ 上可导可知 $F(x)$ 在 $(a_1,b_1)$ 上可导，且〔注意到(4)式〕

$$F'(x) = e^{G(x)} \quad G'(x) = F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)};$$

在(15)式成立的情形下，由 $G(x)$ 在 $(a_1,b_1)$ 上可导可知 $F(x)$ 在 $(a_1,b_1)$ 上可导，且〔注意到(4)式〕

$$F'(x) = -e^{G(x)}G'(x) = F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}.$$

在 $(a_1,b_1)$ 上(6)式必成立．特别在点 $x_0$ 成立．

总之，在条件(1)和条件(5)之下，再假定 $1 + f_n(x) \neq 0 (a < x < b, n = 1,2,3,\cdots)$ 即可推出在 $(a,b)$ 上 $F'(x)$ 存在且公式(6)成立．

**3110.** 证明：若 $0 < x < y$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = 0.$$

**证** 记

$$p_n = \frac{x+n}{y+n}(n = 1,2,3,\cdots).$$

显然，$0 < p_n < 1$. 由题意，现在要证无穷乘积

$$\frac{x}{y}\prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

发散到零．因为部分乘积 $\prod_{k=1}^{n} p_k$ 是正的递减的，故只要证明它是发散的就行了．为此先估计一下 $p_n = 1 + \alpha_n$，则有

$$\alpha_n = p_n - 1 = \frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{y}{n}} - 1 = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{-1} - 1$$

$$= \left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$= \left[1-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$= -\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

故当 $n$ 适当大时，$\alpha_n$ 保持定号．但由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y-x}{n}$ 发散，便知 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散．因此，原无穷乘积发散，即它发散到零．于是，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{y}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{y+k}$$

$$= \frac{x}{y}\prod_{k=1}^{\infty}p_k = 0.$$

证毕．

## § 10. 斯特林格公式

斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0<\theta_n<1),$$

可用来计算当值 $n$ 甚大时的 $n!$.

利用斯特林格公式，近似地计算：

**3111.** $\lg 100!$.

**解** $\lg 100! = \lg\{\sqrt{2\pi\cdot 100}\cdot 100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta}{12\cdot 100}}\}$

$=\frac{1}{2}(\lg 2+\lg\pi+\lg 100)+100\lg 100-100\lg e+\frac{\theta}{1200}\lg e$

$=\frac{1}{2}(0.3010+0.4971+2)+200-100\cdot 0.4343$

$+0.0004\theta$

$=157.9691+0.0004\theta$,

其中 $0<\theta<1$.

**3112⁺.** $1\cdot 3\cdot 5\cdots 1999$.

**解** $1\cdot 3\cdot 5\cdots 1999=\frac{2000!}{2^{1000}\cdot 1000!}$

$=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2000}\cdot 2000^{2000}\cdot e^{-2000}\cdot e^{\frac{\theta_1}{24000}}}{2^{1000}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 1000.}\cdot 1000^{1000}\cdot e^{-1000}\cdot e^{\frac{\theta_2}{12000}}}$

$=7.09\cdot 10^{2866}\cdot e^{\frac{\theta}{12000}}$

$\doteq 7.09\cdot 10^{2866}\cdot\left(1+\frac{\theta}{12000}\right)$,

其中 $|\theta|<1(0<\theta_1<1, 0<\theta_2<1)$.

**3113.** $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 100}$.

**解** $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots99}{2\cdot4\cdot6\cdots100}=\frac{100!}{2^{100}(50!)^2}$

$$=\frac{\sqrt{2\pi\cdot100}\cdot100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{2^{100}\cdot100\pi\cdot50^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_2}{300}}}$$

$$=0.0798e^{\frac{\theta}{300}}\doteq0.0798\left(1+\frac{\theta}{300}\right),$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

3114. $C_{100}^{40}$.

**解** $C_{100}^{40}=\frac{100!}{40!\cdot60!}$

$$=\frac{\sqrt{200\pi}\cdot100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2\pi\cdot40}\cdot\sqrt{2\pi\cdot60}\cdot60^{60}\cdot40^{40}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_2}{480}+\frac{\theta_3}{720}}}$$

$$=10^{28}\cdot1.378e^{\frac{\theta}{288}}$$

$$\doteq10^{28}\cdot1.378\left(1+\frac{\theta}{288}\right),$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1,0<\theta_3<1)$.

3115. $\frac{100!}{20!\cdot30!\cdot50!}$.

**解** $\frac{100!}{20!\cdot30!\cdot50!}$

$$=\frac{\sqrt{2\pi\cdot100}\cdot100^{100}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2^3\pi^3 20\cdot30\cdot50}\cdot20^{20}\cdot30^{30}\cdot50^{50}\cdot e^{-100}\cdot e^{\frac{\theta_2}{240}+\frac{\theta_3}{360}+\frac{\theta_4}{600}}}$$

$$=10^{42}\cdot4.792e^{\frac{\theta}{120}}$$

$$\doteq10^{42}\cdot4.792\left(1+\frac{\theta}{120}\right),$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1,0<\theta_3<1,0<\theta_4<1)$.

3116. $\int_2^1(1-x^2)^{50}dx$.

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

3118. 对于乘积

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$$

推出渐近公式.

**解** $(2n-1)!!=\frac{2n!}{2^n n!}=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot e^{\frac{\theta_1}{24^n}}}{2^n\cdot\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n}\cdot e^{\frac{\theta_2}{12^n}}}$

$$=\sqrt{2}(2n)^n e^{-n+\frac{\theta}{12^n}},$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

3119. 若$n$甚大,近似地计算$C_{2n}^n$.

**解** $C_{2n}^n=\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$=\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\cdot(2n)^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot e^{\frac{\theta_1}{24^n}}}{2\pi n\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}\cdot e^{\frac{\theta_2}{6^n}}}$$

$$=\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}e^{\frac{\theta}{6^n}},$$

其中$|\theta|<1(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

3120. 利用斯特林格公式求下列极限:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$;　　(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$;　　(г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}$.

**解** (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n^2]{2\pi n}\cdot\sqrt[n]{n}\cdot e^{-\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^3}}\right]$

$$=1$$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2\pi n}\cdot n\cdot e^{-1}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}$

$$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e}{\sqrt[2n]{2\pi n}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}=e.$$

(в)利用 3118 题的结果即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[2n]{2}\cdot 2n\cdot e^{-1}\cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}$$

$$=\frac{e}{2}.$$

$$(\Gamma)\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{\ln n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(\ln 2+\ln\pi+\ln n)+n\ln n-n+\frac{\theta}{12n}}{n\ln n}$$

$$=1.$$

## §11. 用多项式逼近连续函数

1°拉格朗日插入公式 拉格朗日多项式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i$$

具有性质 $P_n(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$.

2°白恩什坦多项式 若 $f(x)$是闭区间$[0,1]$上的连续函数，则白恩什坦多项式

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)C_n^i x^i(1-x)^{n-i}$$

当 $n\to\infty$时在闭区间$[0,1]$上一致收敛于函数 $f(x)$.

**3121.** 作出经过下列数组

| $x$ | $-2$ | $0$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $5$ | $1$ | $-3$ | $1$ |

的最低的 $n$ 阶多项式 $P_n(x)$.

$$P_n(-1),P_n(1),P_n(6)$$

近似地等于什么?

**解** $x_0=-2, x_1=0, x_2=4, x_3=5$;

$y_0=5, y_1=1, y_2=-3, y_3=1$.

$$P_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

以$(x_i,y_i)(i=0,1,2,3)$代入上式，化简即得

$$P_3(x)=1-\frac{55}{21}x-\frac{1}{14}x^2+\frac{5}{42}x^3.$$

$$P_3(-1)=1+\frac{55}{21}-\frac{1}{14}-\frac{5}{42}\doteq 3.43,$$

$$P_3(1)=1-\frac{55}{21}-\frac{1}{14}+\frac{5}{42}\doteq -1.57,$$

$$P_3(6)=1-\frac{110}{7}-\frac{18}{7}+\frac{180}{7}\doteq 8.43.$$

3122. 写出经过三点：$A(x_0-h,y_{-1})$，$B(x_0,y_0)$，$C(x_0+h,y_1)$的抛物线方程

$$y=ax^2+bx+c$$

**解** 将三点的坐标代入拉格朗日插入公式，即得

$$y=\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]}y_{-1}$$
$$+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]}y_0$$
$$+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]}y_1$$
$$=y_0+\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}$$

$\cdot(x-x_0)^2$.

3123. 利用数值 $x_0=1, y_0=1$, ; $x_1=25, y_1=5$; $x_2=100, y_2=10$,推出开平方根:$y=\sqrt{x}$ $(1\leqslant x\leqslant 100)$的近似公式.

**解** $y=\sqrt{x}$的近似公式可由拉格朗日插入公式求出:

$$y\doteq\frac{(x-25)(x-100)}{(-24)\cdot(-99)}\cdot 1+\frac{(x-1)(x-100)}{24\cdot(-75)}\cdot 5+\frac{(x-1)(x-25)}{99\cdot 75}\cdot 10$$

$$=0.808+0.193x-0.00101x^2.$$

例如,

$x=4, y\doteq 1.564$(应为 2);

$x=9, y\doteq 2.463$(应为 3);

$x=16, y\doteq 3.637$(应为 4);

$x=36, y\doteq 6.447$(应为 6);

由此看来,误差还较大.

3124. 利用数值

$$\sin 0°=0,\quad \sin 30°=\frac{1}{2},\quad \sin 90°=1,$$

推出如下的近似公式

$$\sin x°\approx ax+bx^3\ (0\leqslant x\leqslant 90).$$

利用这个公式,近似地求:

$$\sin 20°,\quad \sin 40°,\quad \sin 80°.$$

**解** 将 $x=30, \sin 30°=\frac{1}{2}$; $x=90, \sin 90°=1$ 代入近似公式

$$\sin x°\approx ax+bx^3,$$

即得联立方程组

$$\begin{cases} 30a+27000b=\dfrac{1}{2} \\ 90a+729000b=1. \end{cases}$$

解之，得

$$a=\frac{5}{288},b=-\frac{5}{288}\left(\frac{1}{150}\right)^2.$$

因此，

$$\sin x^\circ\approx\frac{5x}{288}\left\{1-\left(\frac{x}{150}\right)^2\right\}.$$

由此近似公式，可得

$\sin 20^\circ\approx 0.341$，$\sin^\circ 40\approx 0.645$，$\sin 80^\circ\approx 0.994$，

这与查表所得的

$\sin 20^\circ=0.3420$，$\sin 40^\circ=0.6428$，$\sin 80^\circ=0.9848$ 近似.

3125. 取数值 $x_i=0,\pm\frac{1}{2},\pm 1$ 作拉格朗日多项式的插值点，对函数 $f(x)=|x|$ 作出在闭区间 $[-1,1]$ 上的拉格朗日插入多项式.

**解** 以 $x_i=0,\pm\frac{1}{2},\pm 1$，$y_i=0,\frac{1}{2},1$ 代入拉格朗日插入式，即得

$$P(x)=\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-1)}{\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\frac{x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2-1)}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\frac{x(x-1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)}\cdot 1$$

$$+\frac{x(x+1)\left(x^2-\frac{1}{4}\right)}{1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2}\cdot 1$$

$$=\frac{x^2}{3}(7-4x^2)\quad(|x|\leqslant 1),$$

此即所求的多项式.

3126. 以拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$，近似地计算

$$\int_0^2 y(x)dx,$$

其中

| $x$ | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y(x)$ | 5 | 4.5 | 3 | 2.5 | 5 |

解 $$y(x)\doteq\frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(-0.5)(-1)(-1.5)(-2)}\cdot 5$$

$$+\frac{x(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5\cdot(-0.5)\cdot(-1)\cdot(-1.5)}\cdot 4.5$$

$$+\frac{x(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{1\cdot 0.5(-0.5)\cdot(-1)}\cdot 3$$

$$+\frac{x(x-0.5)(x-1)(x-2)}{1.5\cdot 1\cdot 0.5\cdot(-0.5)}\cdot 2.5$$

$$+\frac{x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{2\cdot 1.5\cdot 1\cdot 0.5}\cdot 5$$

$$=\left(\frac{10}{3}x^4-\frac{50}{3}x^3+\frac{87.5}{3}x^2-\frac{62.5}{3}x+5\right)$$

$$+(-12x^4+54x^3-78x^2+36x)+(12x^4$$

$$-48x^3+57x^2-18x)+(-\frac{20}{3}x^4+\frac{70}{3}x^3$$

$$-\frac{70}{3}x^2+\frac{20}{3}x)+(\frac{10}{3}x^4-10x^3+\frac{27.5}{3}x^2$$

$$-2.5x)$$

$$=\frac{8}{3}x^3-6x^2+\frac{4}{3}x+5.$$

于是，

$$\int_0^2 y(x)dx \doteq \int_0^2 (\frac{8}{3}x^3-6x^2+\frac{4}{3}x+5)dx$$

$$=(\frac{2}{3}x^4-2x^3+\frac{2}{3}x^2+5x)\Big|_0^2=\frac{22}{3}=7\frac{1}{3}.$$

3127. 对于函数 $x,x^2,x^3$，试在闭区间$[0,1]$上作出白恩什坦多项式 $B_n(x)$.

**解** 对于函数 $f(x)=x$，其白恩什坦多项式 $B_n(x)$为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$=x[x+(1-x)]^{n-1}=x;$$

对于函数 $f(x)=x^2$，其白恩什坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1^2}{n^2}C_n^1 x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_n^2 x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+\frac{3^2}{n^2}C_n^3 x^3(1-x)^{n-3}$$

$$+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_n^{n-1}x^{n-1}(1-x)+\frac{n^2}{n^2}C_n^n x^n$$

$$=\frac{1}{n}x(1-x)^{n-1}+\frac{2(n-1)}{n}x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+\frac{3}{n}\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2!}x^3(1-x)^{n-3}$$

$$+\cdots+\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-2)!}x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$=\frac{1}{n}(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)x(1-x)^{n-1}+\frac{2}{n}(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)$$

$$x^2\cdot(1-x)^{n-2}+\frac{3}{n}(C_{n-1}^2+C_{n-1}^3)x^3(1-x)^{n-3}$$

$$+\cdots+\frac{n-1}{n}(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})x^{n-1}(1-x)$$

$$+x^n-\Big[\frac{1}{n}C_{n-1}^1x(1-x)^{n-1}+\frac{2}{n}C_{n-1}^2x^2$$

$$(1-x)^{n-2}+\cdots+\frac{n-1}{n}C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}(1-x)\Big]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{k}{n}\cdot x^k(1-x)^{n-k}-\frac{n-1}{n}x(1-x)$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^kx^k(1-x)^{n-k-2}$$

$$=x-\frac{n-1}{n}x(1-x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}.$$

对于函数 $f(x)=x^3$,其白恩什坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^kx^k(1-x)^k$$

$$=\frac{1^2}{n^2}C_{n-1}^0x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_{n-1}^1x^2(1-x)^{n-2}$$

$$+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_{n-1}^{n-2}x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$=\frac{1^2}{n^2}(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}$$

$$(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)x^2\cdot(1-x)^{n-2}+\cdots$$

$$+\frac{(n-1)^2}{n^2}(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})x^{n-1}(1-x)+x^n$$

$$-\left[\frac{1^2}{n^2}C_{n-1}^1x(1-x)^{n-1}+\frac{2^2}{n^2}C_{n-1}^2x^2(1-x)^{n-2}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}\cdot(1-x)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x(1-x)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{n-2}C_{n-2}^0(1-x)^{n-2}+\frac{2}{n-2}C_{n-2}^1x(1-x)^{n-3}\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{n-1}{n-2}C_{n-2}^{n-2}x^{n-2}\right]$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x(1-x)$$

$$\cdot\left[\frac{1}{n-2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k}{n-2}C_{n-2}^kx^k(1-x)^{n-k-2}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-2}C_{n-2}^kx^k(1-x)^{n-2-k}\right]$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-\frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2}$$

$$\cdot\left(\frac{x}{n-2}\sum_{k=0}^{n-3}C_{n-3}^k(x^k1-x)^{n-3-k}+1\right)$$

$$=x^2+\frac{x(1-x)}{n}-\frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2}$$

$$\cdot\left(\frac{x}{n-2}+1\right)$$

$$=(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})x^3+\frac{3}{n}(1-\frac{1}{n})x^2+\frac{1}{n^2}x.$$

**3128.** 对于在闭区间$[a,b]$上的已知函数$f(x)$，写出白恩什坦多项式$B_n(x)$的公式．

**解**　令$a+(b-a)y=x$，则当$0\leqslant y\leqslant 1$时$a\leqslant x\leqslant b$，此

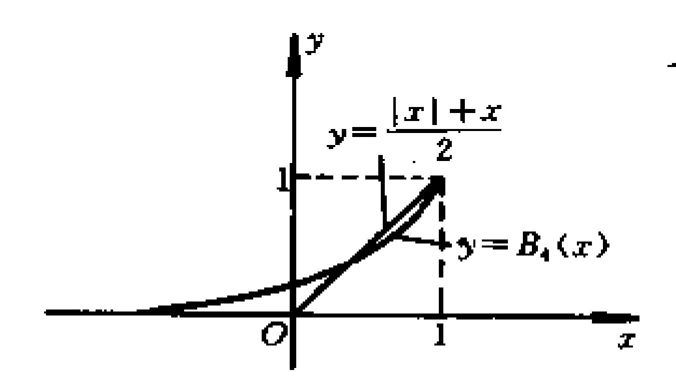



图 5.9

3130+. 在$-1\leqslant x\leqslant 1$内用偶次的白恩什坦多项式逼近函数

$$f(x)=|x|$$

**解** 利用 3128 题的结果，即得

$$B_{2^n}(x)=\sum_{k=0}^{2^n}\left|-1+\frac{k}{n}\right|C_{2^n}^{k}\frac{(x+1)^k(1-x)^{2n-k}}{2^{2n}}$$

$$=\frac{1}{2^{2^n}}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}C_{2^n}^{k}(x+1)^k(1-x)^{2^n-k}+\sum_{k=n+1}^{2^n}\frac{k-n}{n}C_{2^n}^{k}\cdot(x+1)^k(1-x)^{2^n-k}\right\}$$

$$=\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{n-k}{n}C_{2^n}^{k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-k}+\sum_{k=n+1}^{2^n}\frac{k-n}{n}C_{2^n}^{k}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n-k}\right\}$$

$$=\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}C_{2^n}^{n-k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{2^n}^{n+k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-k}\right\}$$

$$=\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{2^n}^{n-k}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{k}\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}C_{2^n}^{n+k}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k\Big\}.$$

由于

$$C_{2^n}^{n-k}+C_{2^n}^{n+k}=C_{2^n}^{n-k}\left[1+\frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+k)}\right]$$
$$=2C_{2^n}^{n-k},$$

故 $C_{2^n}^{n-k}=C_{2^n}^{n+k}$. 因此，可得

$$B_{2^n}(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\sum_{k=1}^{n}\left\{kC^{n-k}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^k\right]\right\}.$$

3131. 对于函数

$f(x)=e^{kx}(a\leqslant x\leqslant b)$

写出白恩什坦多项式 $B_n(x)$.

**解**
$$B_n(x)=\sum_{j=0}^{n}e^{k(a+(b-a)\frac{j}{n})}C_n^j\frac{(x-a)^j(b-x)^{n-j}}{(b-a)^n}$$
$$=\frac{e^{ka}}{(b-a)^n}\sum_{j=0}^{n}e^{k\frac{(b-a)j}{n}}C_n^j(x-a)^j(b-x)^{n-j}$$
$$=\frac{e^{ka}}{(b-a)^n}\left[e^{\frac{b-a}{n}k}(x-a)+(b-x)\right]^n$$
$$=e^{ka}\left[e^{\frac{b-a}{n}k}\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}\right]^n$$
$$=e^{ka}\left[\left(e^{\frac{b-a}{n}k}-1\right)\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x+x-a}{b-a}\right]^n$$
$$=e^{ka}\left[1+\left(e^{\frac{b-a}{n}k}-1\right)\frac{x-a}{b-a}\right]^n.$$

3132. 在闭区间 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上，对于函数 $f(x)=\cos x$ 计算多项式 $B_n(x)$.

**解** 我们有

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}). \tag{1}$$

利用 3131 题的结果(在其中令 $a=-\frac{\pi}{2}$，$b=\frac{\pi}{2}$ 并分别令 $k=i$ 和 $k=-i$)，得 $e^{ix}$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(1)}(x)$ 与 $e^{-ix}$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(2)}(x)$ 分别为：

$$B_n^{(1)}(x)=e^{-\frac{\pi}{2}i}\left[1+\left(e^{\frac{i\pi}{n}}-1\right)\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\right]^n,$$

$$B_n^{(2)}(x)=e^{\frac{\pi}{2}i}\left[1+\left(e^{-\frac{i\pi}{n}}-1\right)\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)\right]^n.$$

于是，

$$B_n^{(1)}(x)=e^{-\frac{\pi i}{2}}\left\{e^{\frac{\pi i}{2n}}\left[e^{-\frac{\pi i}{2n}}+\left(e^{\frac{\pi i}{2n}}-e^{-\frac{\pi i}{2n}}\right)\cdot\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}^n$$

$$=e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{\frac{\pi}{2}i}\left[\cos\frac{\pi}{2n}-i\sin\frac{\pi}{2n}+2i\sin\frac{\pi}{2n}\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\right]^n$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n.$$

同理可得

$$B_n^{(2)}(x)=\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n.$$

于是，根据(1)式，即知 $\cos x\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 为：

$$B_n(x)=\frac{1}{2}\left[B_n^{(1)}(x)+B_n^{(2)}(x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right].$$

应当指出，我们也可不利用(1)式以及 3131 题的结果，而利用 3128 题的结果直接写出 $\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$：

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)C_n^k\frac{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{n-k}}{\pi^n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}C_n^k\frac{(\pi+2x)^k(\pi-2x)^{n-k}}{(2\pi)^n},$$

这是 $B_n(x)$的另一表示式．

**3133**. 证明：在闭区间$[-1,1]$上，$|x|=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$，其中

$$P_n(x)=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2i-3)}{2\cdot 4\cdots(2i)}(1-x^2)^i.$$

**证** $|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{1-t}$，其中$t=1-x^2$.

我们知道，函数 $\sqrt{1-t}$按幂级数展开有

$$\sqrt{1-t}=1+\frac{1}{2}(-t)$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot(-t)^n$$

$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n!\,2^n}(-1)^nt^n$$

$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}(-1)^{2n-1}t^n$$

$$=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n(-1<t<1). \quad (1)$$

当 $t=\pm 1$ 时，上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(\pm 1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}a_n.$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n-1}-1\right)=\frac{3}{2}>1,$$

故由拉阿伯判别法可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛．因此，由幂级数的亚伯耳定理知，(1) 式当 $t=\pm 1$ 时也成立，即有

$$\sqrt{1-t}=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n$$

$$(-1\leqslant t\leqslant 1). \qquad (2)$$

于是，将 $t=1-x^2$ 代入，即得

$$|x|=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}P_n(x) \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1). \qquad (3)$$

证毕．

注　由幂级数的性质知(2)式右端的级数在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上一致收敛(实际在 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 上也一致收敛)，故(3)式中的级数在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收敛．因此，我们实际证明了更强的结论：当 $n\to\infty$ 时 $P_n(x)$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致趋于 $|x|$.

**3134.** 设 $f(x)$ 是对于 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 的连续函数而 $a_n,b_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是它的福里叶系数. 证明菲叶耳三角多项式

$$\sigma_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$$

在区间$(-\pi,\pi)$上一致收敛于函数$f(x)$.

**证** 首先指出，本题结论有误，有所设条件下，只能断定：对任何$\eta>0$，$\sigma_n(x)$在$[-\pi+\eta,\pi-\eta]$上一致收敛于$f(x)$，而一般推不出$\sigma_n(x)$在$(-\pi,\pi)$上一致收敛于$f(x)$. 但若再假定$f(-\pi)=f(\pi)$，则能推出$\sigma_n(x)$在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$.

今证于下. 首先，以$f(x)$在$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上的函数值为基础按$2\pi$为周期将函数$f(x)$延拓到整个$(-\infty,+\infty)$上，延拓后的函数仍记为$f(x)$（注意，若原来$f(-\pi)\neq f(\pi)$，则延拓后的函数在$x=\pi$的函数值不等于原来的函数值$f(\pi)$，但一个点的函数值对于下面各积分之值毫无影响）. 用$S_n(x)$表$f(x)$的福里叶级数的部分和，则

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos m(u-x)\right]du.$$

将$n$个等式

$$2\sin\frac{v}{2}\cos mv=\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)v-\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)v$$

$$(m=1,2,\cdots,n)$$

相加得

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos mv=\frac{\sin(2n+1)\frac{v}{2}}{2\sin\frac{v}{2}},$$

从而(作代换 $u-x=t$)

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{2\sin\frac{u-x}{2}}du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

由于周期为 $2\pi$ 的函数 $F(u)$ 在长为 $2\pi$ 的闭区间 $[\lambda,\lambda+2\pi]$ 上的积分 $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi}F(u)du$ 与 $\lambda$ 无关,故上式右端的积分 $\int_{-\pi-x}^{\pi-x}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$. 由此,再将 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 表为 $\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi}$,并在 $\int_{-\pi}^{0}$ 中作代换 $t=-s$,即得表达式

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

显然 $\sigma_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x)$,故

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\cdot\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

由于

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})t$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} [\cos kt - \cos(k+1)t]$$

$$= 1 - \cos nt = 2\sin^2 \frac{nt}{2}.$$

故

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}\right]^2 dt. \tag{1}$$

特别在(1)式中，令 $f(x)\equiv 1$，则显然这时 $S_n(x)\equiv 1$，从而 $\sigma_n(x)\equiv 1$，因此得下面的等式：

$$1 = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}\right]^2 dt. \tag{2}$$

(1)式减去(2)式乘 $f(x)$，得

$$\sigma_n(x) - f(x)$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi [f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)] \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}\right]^2 dt. \tag{3}$$

由(3)式证明下述两结论：

i)对任何 $\eta > 0$，$\sigma_n(x)$ 在 $-\pi+\eta \leqslant x \leqslant \pi-\eta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

ii)若更设 $f(-\pi) = f(\pi)$，则 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

先证 i). 设已给 $\eta > 0$. 显然，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$

上有界，故存在常数 $M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant M(-\infty<x<+\infty).$$

注意，延拓后的函数在点 $x=\pi, x=-\pi$ 可能不连续，(可能有第一类间断点)，但在 $-\pi<x<\pi$ 上肯定是连续的，因此，在 $\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$ 上必一致连续. 于是，对任给的 $\varepsilon>0$，必有 $\delta>0$ 存在，使对于闭区间 $\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$ 上任何两点 $x', x''$，只要 $|x'-x''|\leqslant\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$\tau=\min\left\{\delta,\frac{\eta}{2}\right\}.$$

根据(3)式，有

$$\begin{aligned}\sigma_n(x)-f(x)=&\frac{1}{2n\pi}\int_0^\tau[f(x+t)-f(x)+f(x-t)\\&-f(x)]\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt\\&+\frac{1}{2n\pi}\int_\tau^\pi[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\\&\cdot\left[\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2dt=I_1+I_2;\end{aligned}\tag{4}$$

显然，当 $0\leqslant t\leqslant\tau, -\pi+\eta\leqslant x\leqslant\pi-\eta$ 时，有 $x+t\in\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right], x-t\in\left[-\pi+\frac{\eta}{2},\pi-\frac{\eta}{2}\right]$,

从而

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由此可知，$\sigma_n(x)$在$[-\pi+\eta,\pi-\eta]$上一致收敛于$f(x)$.

再证 ii)，若原来给定的$[-\pi,\pi]$上的连续函数$f(x)$满足$f(-\pi)=f(\pi)$，则前述延拓出去后的函数$f(x)$是整个$(-\infty,+\infty)$上的连续函数. 因此，在$[-2\pi,2\pi]$上必一致连续. 于是，对于任给的$\varepsilon>0$，必有$\tau>0$存在，(可取$\tau<\pi$)，使对于$[-2\pi,2\pi]$中任何两点$x',x''$，只要$|x'-x''|\leqslant\tau$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

以下的证明和 i)对应部分类似. 首先，对刚才确定的$\tau$，写出(4)式. 显然，当$0\leqslant t\leqslant\tau$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$时，有$x+t\in[-2\pi,2\pi]$，$x-t\in[-2\pi,2\pi]$，故

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ |f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，当$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$时(5)式成立. 同样(6)式成立. 于是，当$n>N=\left[\dfrac{4M}{\varepsilon\sin^2\dfrac{\tau}{2}}\right]$时，对一切$x\in[-\pi,\pi]$，恒有

$$|\sigma_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

故$\sigma_n(x)$在$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$上一致收敛于$f(x)$.

最后，我们举例说明，若$f(-\pi)\neq f(\pi)$，则一般不能断定$\sigma_n(x)$在$(-\pi,\pi)$上一致收敛于$f(x)$. 例如，设

$$f(x)=x\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

我们证明这时的$\sigma_n(x)$在$-\pi<x<\pi$上不一致收敛于$f(x)$. 用反证法，假定$\sigma_n(x)$在$-\pi<x<\pi$上一致收敛

于 $f(x)=x$. 由福里叶级数的收敛性定理(即迪里黑里定理)知,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi), \tag{7}$$

这里

$$S(x)=\begin{cases} f(x)=x, & \text{当 } -\pi<x<\pi \text{ 时}, \\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=0, & \text{当 } x=\pm\pi \text{ 时}, \end{cases}$$

由此可知,$S(x)$在点 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续,但另一方面,根据(7)式,利用 138 题的结果知,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)=S(x)\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi). \tag{8}$$

由反证法的假定,$\sigma_n(x)$在 $-\pi<x<\pi$ 上一致收敛于 $S(x)$(在 $-\pi<x<\pi$ 上,$f(x)=x=S(x)$). 而由(8)式,当 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 时,$\sigma_n(x)$也收敛于 $S(x)$,故知 $\sigma_n(x)$在 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上一致收敛于 $S(x)$. 显然,$\sigma_n(x)$都是 $x$ 的连续函数($-\pi\leqslant x\leqslant\pi$),由此可知,极限函数 $S(x)$也必在 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上连续;此与$S(x)$在 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续的事实矛盾,此矛盾证明了$\sigma_n(x)$在$(-\pi,\pi)$上收敛于$f(x)=x$不是一致的.

本题全部证毕.

**3135.** 对于函数

$$f(x)=|x|\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

作出菲叶耳多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

**解** 由于 $f(x)$是偶函数,故

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\ &=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x\\ &=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}
\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\
&\quad \cdot\cos(2k-1)x \\
&= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.
\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\sigma_{2n-1}=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix$$

$$=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]$$

$$\cdot\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\sigma_{2n-1}=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix$$

$$=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]$$

$$\cdot\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$
$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad\cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix \\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right] \\ &\quad \cdot\cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0,a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$(n=1,2\cdots),$$

故

$$a_{2k}=0, a_{2k-1}=-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}(k=1,2,\cdots).$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_{2n-1}&=\frac{\pi}{2}+\sum_{i=1}^{2n-2}\left(1-\frac{i}{2n-1}\right)a_i\cos ix\\&=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{2k-1}{2n-1}\right)\cdot\left[-\frac{4}{(2k-1)^2\pi}\right]\\&\quad\cdot\cos(2k-1)x\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.\end{aligned}$$